Matematikai Lapok

2011/1

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként kétszer.

Új sorozat 17. évfolyam (2011), 1. szám

Nyomdai előkészítés: Miklós Ildikó

ISSN 0025-519X

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. Telefon: 225-8410.

Ára:
- A Bolyai János Matematikai Társulat tagjainak ingyenes
- nem társulati tagoknak egy évfolyam 2464 Ft (ÁFÁ-val).

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

A Matematikai Lapok megjelenését támogatja a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

VÁLASZ TUSI CIKKÉRE

FRIED ERVIN

A *Matematikai Lapok* 2010/3. számában jelent meg TUSI-nak (*Tusnády Gábornak*) egy cikke, amelyik rólam, illetve nekem szólt. Ehhez szeretnék néhány megjegyzést fűzni.

Ebben a számban több olyan cikk is szerepel, amelyek nem közvetlenül matematikáról szólnak. Engedtessék meg nekem, hogy amit én most írok, az sem közvetlenül matematika legyen. Továbbmenve, először nem is TUSI cikkéhez fűznék néhány megjegyzést, hanem *Kovács Klára Megérteni valamit* című cikkéhez.

Még egyetemi hallgató voltam, amikor *Horváth Jonci* nevű évfolyamtársam megkért, hogy magyarázzak meg neki egy analízistételt. Mondtam neki: „Jonci! Én nem is tudom a tétel bizonyítását". Erre azt válaszolta, hogy: „Nem baj! Én a bizonyítást tudom, csak nem értem!". Természetesen attól fogva tiszteltem Joncit.

Ebből is érezhető, hogy a megértésnek milyen sok fokozata van; és milyen magas szellemi teljesítmény arra rájönni, hogy ha valamit tudunk, nem biztos, hogy értjük is. Erre szeretnék saját életemből néhány példát felhozni.

Turán-vizsga: a legjobb hallgatók az utolsó órán úgy mehettek el vizsgázni, hogy nem volt felkészülési idejük. Én Csebisev tételének Erdős-féle bizonyítását kaptam; amit meg is értettem, és nagyon szerettem. Vizsga közben a bizonyítás valahonnét az agyam hátuljától folyt a szájam elejéig. Közben rájöttem, hogy egy ponton meg fogok akadni a folytatással. Ennél a pontnál Turán azt mondta: „Köszönöm, elég!". A másik szobában ülő Surányinak elmondtam az esetet, mire ő azt mondta, hogy „Hát akkor folytasd!" – Egy fél perc sem telt bele, és tudtam folytatni. Megnyugodtam, hogy akkor tényleg értem a bizonyítást, még a lényegét is.

Egyébként Turántól sok mindent tanultam, ami segíti a megértést. Például azt, hogy egy sor konvergenciájának a bizonyításánál *elöl* kevés tag van, *hátul* kicsik a tagok. A gondot a *középső* rész okozza. Azt kell megérteni és jól megválasztani, hogy miképpen vágjuk szét ezeket a részeket.

Természetesen igyekeztem megérteni, amiket tanáraimtól hallottam; de azt is meg kellett értenem, amiket a hallgatóimnak elmondtam. Éppen TUSI-val volt sok *kedves* esetem. Elmondtam egy-egy bizonyítást, amire azt mondta: „nem értem!". „Hát" – mondom – „hogyhogy nem érti?". Kiderült, hogy valamit nem mondtam pontosan. Harmadik, negyedik ilyen alkalommal már azzal kezdtem: „Mit mondtam rosszul?" Egyszer (ez talán már egy specin volt) azt mondtam, hogy az n-edfokú egyenletekre vonatkozó megoldóképlet létezése pontosan azt jelenti, hogy az n-edfokú általános polinom megoldható. (Ez derült ki a szakkönyvekből.) Ezt az állítást sem hitte el TUSI. Valóban, ez csak 0-karakterisztika esetén igaz. Az általános n-edfokú egyenlet megoldhatósága kicsit erősebb, mint a megoldóképlet létezése, ami kicsit erősebb, mint az összes n-edfokú egyenlet megoldhatósága. Ezt meg is írtam a *Matematikai Lapokba* – XVIII (1967), 293–296. – nehogy valaki ismét pontatlanul gondolja meg.

A *Természet Világának* adott interjújában Kollár János valami olyasmit mondott, hogy Fried Ervin olyan dolgokat is meg tudott tanítani, amiket ő maga nem tudott.

Már nyugdíjas koromban (közel a 80. évemhez) egy – felsőbbéveseknek és doktoranduszoknak tartott – választható sávelőadáson elmondtam egy tőlem származó tételnek a bizonyítását, amit az egyik hallgató (talán *Pongrácz András*) nem értett meg. Elkezdtem magyarázni, de akkor már én sem értettem. Sebaj!, a padszomszédja (talán *Maga Péter*) elmagyarázta, amit aztán András már megértett!

Hát tessék most megmondani, mit jelent valamit megérteni?!

De térjünk most vissza TUSI cikkéhez!

Kedves Gábor!

Mindenekelőtt köszönöm, amit írtál, és köszönöm, hogy vetted a fáradságot, és elhoztad nekem a *Matematikai Lapok* egy – cikkedet tartalmazó – példányát. Köszönöm azt a szeretetet, amivel az egész témát kezelted. Köszönöm, mert úgy érzem, hogy ez a szeretet személyesen felém (is) irányul. Gondolom és érzem, hogy ez a szeretet nem előzmények nélkül való, hanem abból a szeretetből (is) adódik, amit én éreztem a Te és feleséged irányában.

Hogyan?!, kérdezhetné valaki. Hát lehet-e, szabad-e egy oktatónak (tanárnak) érzelmileg fordulni egyes hallgatókhoz azért, mert esetleg jobbnak tartja a másik hallgatónál? Természetesen nem!

Én nem is állítottam azt, hogy kivételeztem volna Veletek. Hiszen az évfolyamotok sok kirándulásán vettem részt (lehet, hogy ilyeneket javasoltam magam is); és ilyenkor mindig *köztetek éltem*. És szeretettel fordultam mindnyájotokhoz. Azokhoz is akik elégségest – esetleg szigorúan nézve – nem is igazán megérdemelt elégségest kaptak tőlem. Hát ezek szerint nem voltam abszolút igazságos? Bevallom, nem! Nemcsak a tudást, nemcsak a megértést néztem, hanem azt is, hogy milyen tanárrá válhat az illető.

Hát hogy merészeltem magamnak vindikálni a jogot mások ilyen mérvű megítélésére? Valójában nem is tudom, de úgy éreztem, ezt kell tennem, mert mások ítéletében még kevésbé bízhattam.

Már ennyiből is látható, hogy beképzelt és rettenetesen hiú vagyok. Tessék megbocsátani ezeket a bűnöket, mert viszont nem vagyok rosszindulatú (hiszem én).

A fent idézett cikknek az eredetije TUSI egy előadásán hangzott el, ami 2009. szeptember 12-én vagy 14-én volt a Rényi (Matematikai) Kutatóintézetben. Ekkor ugyanis volt diákjaim egy összejövetelt szerveztek a Rényi Intézetben abból az alkalomból, hogy szeptember 6-án születtem. Ez nem hivatalos (egyetemi) megemlékezés volt. Ide bárki eljöhetett, aki úgy érezte, hogy örömet akart szerezni nekem. Elsősorban azokat a tanítványaimat, hallgatóimat várták, akik valamilyen módon szerettek volna rólam beszélni. Elég sokan voltak. Főleg olyan dolgok hangzottak el, hogy miben voltam más, mint amit egy egyetemi oktatótól elvárhattak.

Nagy örömömre szolgált, hogy olyasmiket mondtak, amikre valóban nagy súlyt fektettem (minden szempontból egyenlőnek érezni magamat velük, közöttük élni, *emberszeretni* egymást, tisztelni egymást, megértetni a matematikai gondolkodásmódot, segíteni a *fiatalok* előrejutását stb.). Tévedés ne essék, ezeket nem különleges tulajdonságaimnak tekintettem; ilyen vagyok, *nem tudok* másmilyen lenni. Hozzá kell tennem, hogy ezeknek a tulajdonságoknak jó részét saját tanáraimtól láttam. Számomra örömet okozott, ha megmutathattam, hogy okosabb vagyok náluk; de talán még nagyobb örömet okozott, amikor ők tudták megmutatni, hogy okosabbak mint én. (Megjegyzem, hogy erről az összejövetelről *Juhász Lehel* videófelvételt is készített, amelynek egy-egy kópiáját (talán) *Ács Kati* és *Pálfy Péter Pál* is megkapták.)

Természetesen még hallgatóim sem voltak mindig elégedettek velem (nem is beszélve az egyetem sok *fura uráról*). De azért általában csak-csak sikerült közös nevezőre jutni. Amikor *Frenkel Peti* évfolyamán tanítottam, rendszeresen éreztem, hogy *nincs megelégedve velem*. Sajnos csak akkor mondta meg a véleményét, amikor befejezte egyetemi tanulmányait – miszerint „nem így kell tanítani" – ezen aztán elvitatkozgattunk. Szerintem mindenkinek úgy kell csinálnia, ahogy legjobbnak tartja („Mindenki másképp csinálja").

Nem emlékszem arra, hogy hallgatóim közül valaki is irigykedve vagy gyűlölettel tekintett volna rám. Kollégáim között persze előfordult ilyesmi.

Még hallgató koromban a *pártharcos* évfolyamtársaim szememre vetették, hogy szakbarbár vagyok, mert nem követtem szó szerint az *aktuális* ideológia-politikát. Ez a szakbarbárság nem volt igaz. Ezt az is igazolja, hogy oktatóként nagy súlyt fektettem arra, hogy a hallgatók széles körű kulturális (irodalmi, képzőművészeti, földrajzi, biológiai stb.) ismeretekkel rendelkezzenek; azt ígértem, hogy ilyen hiányosságokért a vizsgán bukás jár(na). Ennek az ellenszenvnek volt a következménye, hogy az egyetemi tanulmányok elvégzése után nem vettek fel aspiránsnak, hanem egy évig Salgótarjánban kellett tanítanom. (Megjegyzem, annak ellenére, hogy ez tudományos munkámban erősen visszavetett, sok hasznos oktatási tapasztalatra tettem szert. Ezért hálásnak kell lennem *Bácskai János* volt igazgatómnak.)

Később egy-egy éves meghívást kaptam a kanadai *University of Manitoba* matematikai intézetébe. Már első alkalommal sokat tanultam univerzális algebrából; valamint arról, hogy miképpen lehet szervezetten együtt dolgozni a kollégákkal. A második alkalommal annyira megtetszett az ottani szeminárium élete, hogy hazajövetelem után én is szerveztem egy ilyen szemináriumot. (Megindításáért hálával tartozom *Babai Lacinak.*) E szeminárium (emberileg is) olyan sikeresnek bizonyult, hogy a *Természet Világában* egy cikk jelent meg róla. Ebben – a pedagógusi munka önemésztő nehézségére mutatva – megemlítettem a következő *Arany János* idézetet, hogy „... pályám bére égető, mint Nessus vére...". E cikk után egy volt kollégám, visszaemlékezve arra, hogy első kanadai utamról egy dízel Mercedeszt hoztam haza, azt a rosszmájú félreidézett szöveget tette hozzá, hogy „... gyalog bizon, legfeljebb, ha mercedoszon...". Ugyanis első kanadai utamon, ténylegesen *fogamhoz verve minden garast,* sikerült egy Mercedesz árát megspórolnom; lévén, hogy ez volt az egyetlen lehetőségem arra, hogy négy gyerekemnek megmutathassam az egész országot. (Ha akkor rájövök, hogy mire céloz, biztos folytattam volna ebből a versből való további idézettel: „... Ha egy úri lócsiszárral találkoztam s bevert sárral: Nem pöröltem, – Félreálltam, letöröltem....")

Akkor nagyon mérges voltam. Ma már sajnálom az illetőt, aki az életben csak az anyagi értéket irigyli – pedig irigyelhette volna azt, hogy milyen sikeres kapcsolatot tudtam létesíteni diákjaimmal.

Kedves diákjaim, **köszönök nektek mindent!**

NÉHÁNY MEGOLDATLAN ÉS MEGOLDOTT PROBLÉMÁRÓL AZ IRÁNYÍTOTT GRÁFOK ELMÉLETÉBEN. II. RÉSZ

ÁDÁM ANDRÁS

1. Bevezetés

1.1. Az előző [4] közleményben két témát tekintettünk át, amelyek tisztán kombinatorikai természetűek voltak. A jelen folytatásban is két kérdéskörrel foglalkozunk (ezek függetlenek egymástól és a korábbiaktól). Továbbra is véges irányított gráfokat vizsgálunk; a felvetett problémák most olyan jellegűek, hogy főképpen az algebrai beállítottságú gráfelméleszeket érdekelhetik.

A [4] cikkben több helyen megfogalmaztam egy-egy pontosan körülhatárolt nyílt problémát, akár mint igenlően vagy nemlegesen megválaszolható állítást, akár mint kidolgozásra váró komoly kutatási irányt. Ezúttal lezártabbnak mutatkozó két témába fogok betekintést adni; explicite kimondott nyílt kérdéseket nem vetek fel, csatlakozó további vizsgálatok lehetőségére is csupán a 2.7. és 4.7. szakaszokban utalok. (Emellett a 4.8. szakaszban, valamint az F-4. függelékben mondottak érdekesek lehetnek azok számára, akik a gráfok közötti homomorfia különféle változatait tanulmányozzák.)

1.2. A munka 2. és 3. fejezete a cirkuláns gráfok izomorfia-problémájával foglalkozik. Cirkuláns gráfokon azokat az irányított gráfokat értjük, amelyeknek van olyan automorfizmusuk, hogy az ciklikusan permutálja a gráf összes pontjait. A cirkuláns gráfokat $\mathrm{Cay}\,(n; m_1, m_2, \ldots, m_k)$ alakú formulákkal írhatjuk le (itt n a gráf pontjainak száma); kiterjedt és gyümölcsöző kutatásokra vezetett az a kérdés, hogy két ilyen formájú szimbólum mikor jellemzi (az izomorfia értelmében) ugyanazt a gráfot. A vizsgálatokban az 1967-ben közölt [1] nyílt problémám váltott ki jelentékeny lendületet[1]; számos szerző több tucat dolgozata után Mihail Muzychuk

[1]Magam csak egyszer tértem vissza erre a kérdésre, éspedig a [2] cikk 3. és 4. szakaszaiban. E munkából – közelebbről a 12. szakasz első mondataiból – az is látható, hogy a cirkuláns gráfok felé milyen motiváció folytán fordult a figyelmem.

három munkájával ([12]–[14]) jutottunk el oda, hogy a problémát tisztázottnak tekinthetjük[2].

1.3. Amennyiben n négyzetmentes vagy egy négyzetmentes szám kétszerese, úgy az n pontot tartalmazó gráfok körében az izomorfia-probléma megoldása viszonylag egyszerűen leírható (habár a bizonyítás csak sokára vált teljessé és bonyolult). A 2. fejezetben az erre vonatkozó eredményeket foglalom össze.

Muzychuk azzal tetőzte be ilyen irányú tevékenységét [14], hogy kritériumot adott *tetszőleges* n *esetén* az izomorfia eldöntésére az n pontot tartalmazó gráfok körében. A gondolatait olyan algoritmus gyanánt vázolom a 3. fejezetben, amely egy adott szimbólumból kiindulva mindazokat a szimbólumokat szolgáltatja, amelyek az eredetivel izomorf gráfot állítanak elő.

A 3. fejezet tanulmányozásába csak akkor érdemes az olvasónak belevágnia, ha az előző fejezet ismeretében még mindig élénk érdeklődést érez a témában való további tájékozódás iránt.

1.4. A jelen cikk az izomorfia-problémának csak a gráfelméleti vonatkozásaival foglalkozik. Már itt megemlítem azonban – és a 2.7. szakaszban újra érinteni fogom –, hogy az analóg kérdések tanulmányozása szélesebb algebrai síkra is kiterjedt, eltávolodva a gráfok elméletétől. Ezt a ma sem lezárt kutatási irányt Babai László kezdeményezte a [8] közleményben.

1.5. A 4. fejezetben újabb tárgykörre térünk át, nyugodtabb vizekre evezünk. E fejezet – és a hozzá tartozó négy függelék – tárgya az (összefüggő) irányított gráfok pontjai halmazán tekintett bizonyos partíciók áttekintése. A partícióknak ez a típusa analógiában áll az algebrai struktúrákon értelmezett kongruenciarelációkkal; éspedig azon feltétel által van definiálva, hogy valahányszor léteznek az AC, BD élek a gráfban és A, B ugyanabban a partícióosztályban levő pontok, úgy C és D is kötelesek közös osztályba tartozni.

A partícióknak ezt a típusát a [3] közleményben kezdtem tanulmányozni, azon feltevés mellett, hogy a gráf minden pontjának pozitív a kilépő fokszáma. Borisz Klossz az ezt követő [10] munkában úgy fejlesztette tovább az elméletet, hogy megengedte a nyelők (azaz a 0 kilépő fokú pontok) előfordulását is.

A cikk záró részei főképpen a [3], [10] publikációkban tárgyalt kérdésekről adnak ismertetést.

---

[2]Ezek a kutatások nemcsak terjedelmükben impozánsak, hanem igen szövevényesek is. Olykor eljátszom a gondolattal: hátha egyszer Mefisztó megjelenne az alvilágból és alkut ajánlana nekem. Egyfelől kötelezném magam, hogy a matematikára fordítható minden időmet és energiámat az idevágó vizsgálatok lényeges vonulatának (és a szükséges előismereteknek) a tüzetes megértésére szentelem; másfelől a démon jó egészségről és változatlan szellemi erőről biztosítana mindaddig, amíg ennek a feladatnak maradéktalanul eleget nem tettem.

Ha ez történhetne, minden okom meglenne – 76 évesen – a mefisztói javaslat elfogadására.

1.6. Amint a [4] cikkben, most is véges irányított gráfokat tekintünk. Abból, hogy az előző munkában egyszerű gráfokra szorítkoztunk, továbbra is fenntartjuk a párhuzamos élpárok kizárt voltát, az 1 és 2 hosszúságú ciklusokat – azaz a hurkokat és az ellentétesen irányított élpárokat – ezúttal általában megengedjük. Közelebbről: a 4. fejezetben mindkét fajta „rövid" ciklus előfordulhat; a 2. és 3. fejezetben olyan a problémánk, hogy hurkok eleve nem léphetnek fel.

A G gráf azon pontjainak halmazát, amelyekbe a gráf egy A pontjából él visz, $\delta_G(A)$-val (vagy, ha a félreértés lehetősége távol áll, egyszerűen $\delta(A)$-val) jelöljük. Ha a gráf minden pontjára $|\delta(A)| \in \{0,1\}$ érvényes, akkor *kvázi-funkcionális* gráfról beszélünk; amennyiben $|\delta(A)| = 1$ teljesül mindig, úgy a gráfot *funkcionálisnak* mondjuk.

Ha A olyan pont, hogy $|\delta(A)| = 1$, akkor $\delta(A)$ egyetlen elemét $\delta_1(A)$-val is jelöljük.

Idézzük fel azt a konstrukciót, amellyel (a [4] munka 1.7. szakaszában) egy G gráf (diszjunkt) $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_q$ ponthalmazait összevontuk egy-egy ponttá. Jelöljük G összes pontjának halmazát $\mathfrak{V}(G)$-vel. Tekintsük az összevonást azon feltétel mellett, hogy $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_{q-1}$ és $\mathfrak{H}_q$ $\mathfrak{V}(G)$ egy partíciójának az osztályai (vagyis egyesítésük kimeríti $\mathfrak{V}(G)$-t). Jelöljük az összevonással keletkező gráfot K-val.

Az összevonás eljárását úgy vezettük be [4]-ben, hogy K pontjain nem lehet hurok. Most egy rokon (de a fentivel nem teljesen egyező) eljárást fogunk definiálni.

1. konstrukció. Legyen π a G gráf $\mathfrak{V}(G)$ ponthalmazának egy q indexű partíciója. Képezzük a G/π gráfot – amelyet a G gráf π szerinti *faktorgráfjának* nevezünk – az alábbi módon:

G/π-nek q pontja van, és ezek az $E_1, E_2, \ldots, E_q$ pontok bijektív módon vannak megfeleltetve (rendre) a π szerinti $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_q$ osztályoknak;

$E_j \in \delta(E_i)$ pontosan akkor igaz G/π-ben, ha vannak olyan $A(\in \mathfrak{H}_i)$, $B(\in \mathfrak{H}_j)$ pontok G-ben, hogy $B \in \delta(A)$.

Induljunk ki valamely G gráfból és π partícióból. Amint könnyen látható, K és G/π abban különböznek egymástól, hogy K pontjain nem lehetnek hurkok, G/π pontjain viszont többnyire vannak.[3]

1.7. Ha a, b egész számok és $a \leq b$, akkor jelentse $[a,b]_*$ az

$$\{a, a\ +1, a\ +2, \ldots, b-1, b\}$$

számhalmazt.

[3]Az E_i pont éppen akkor hurok nélküli, ha
$\mathfrak{H}_i$ elemei is hurokmentesek, és
$\mathfrak{H}_i$ elemei páronként összekötetlenek.

2. A cirkuláns gráfok izomorfia-problémájáról (részleges eredmények)

2.1. A meggondolásaink tárgyát a jelen 2. és a hozzá csatlakozó 3. fejezetben inkább maguk a

$$\text{Cay}\,(n; m_1, m_2, \ldots, m_k) \tag{2.1}$$

alakú szimbólumok[4] fogják képezni, mint az általuk meghatározott gráfok. Azzal foglalkozunk ugyanis, hogy két (2.1) típusú szimbólum mikor írja le ugyanazt a gráfot (a gráfelméleti izomorfia értelmében).

2.2. Tekintsük az $n_1, m_1, m_2, \ldots, m_k$ számokat, ahol $0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_k < n$. Vezessük be a $\text{Cay}\,(n; m_1, m_2, \ldots, m_k)$ jelölést arra az n számozott ponttal bíró (irányított) gráfra, amelyben a P_i pontból pontosan akkor visz él a P_j pontba, ha van olyan $h \in \{1, 2, \ldots, k\}$, hogy érvényes a

$$j - i \equiv m_h \pmod{n}$$

kongruencia.[5] Világos, hogy a gráf nk számú élt tartalmaz. Azt is láthatjuk, hogy a pontok

$$\alpha = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \ldots & P_{n-1} & P_n \\ P_2 & P_3 & \ldots & P_n & P_1 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

permutációja automorfizmusa a $\text{Cay}\,(n; m_1, m_2, \ldots, m_k)$ gráfnak.

Ennek az állításnak a megfordítása is igaz. Nevezzük *cirkuláns gráfnak* a G gráfot, ha pontjait alkalmas módon számozva van (2.2) alakú α automorfizmusa; könnyen látható, hogy bármely n pontú cirkuláns gráf izomorf valamely (2.1) gráffal.

A legutóbbi mondat végét úgy is fogalmazhatjuk, hogy „izomorf *legalább egy* (2.1) alakú gráffal". Nem érvényes az élesebb „pontosan egy" megfogalmazás; két

$$\text{Cay}\,(n; m_1, \ldots, m_k), \quad \text{Cay}\,(n; m'_1, \ldots, m'_k) \tag{2.3}$$

gráf ugyanis izomorf lehet akkor is, ha a vessző nélküli és a vesszős m számok nem egyeznek meg egymással. *A 2. és 3. fejezeteket éppen ezen többértelműség* (eléggé elbonyolódó) *elemzésének szenteljük.*

2.3. Legközelebbi célunk elégséges feltételt találni két cirkuláns gráf izomorfiájára. Induljunk ki egy $G_1 = \text{Cay}\,(n; m_1, m_2, \ldots, m_k)$ gráfból. Válasszunk egy r számot úgy, hogy $1 \leq r < n$ és r relatív prím n-hez. Képezzük az $m'_1, m'_2, \ldots, m'_k$ számokat

---

[4]Ebben a szimbólumban a Cay szótöredék Arthur Cayley nevére utal.

[5]A megelőző [4] közleményben is előfordultak ilyen módon jelölhető gráfok: $\text{Cay}\,(12; 2, 3, 8)$ a 2. példában, továbbá $\text{Cay}\,(5; 1, 3)$, $\text{Cay}\,(6; 1, 2)$ és $\text{Cay}\,(7; 1, 5)$ rendre a 4[b], 9[b], illetve 10[a] példákban.

olyan módon, hogy az $rm_1, rm_2, \ldots, rm_k$ szorzatokat redukáljuk mod n, majd növekvő sorrendbe rendezzük őket. Ezzel megkaptuk a $G_2 = \mathrm{Cay}\,(n; m'_1, m'_2, \ldots, m'_k)$ gráfot.[6]

Azt mondjuk, hogy a G_1 és G_2 cirkuláns gráfok *ϱ-ekvivalensek*, ha G_2 a most leírt módon származtatható G_1-ből. Könnyen igazolható, hogy ezzel valóban ekvivalenciarelációt vezettünk be. (Az n és k számok ugyanazok G_2-re, mint G_1-re.)

1. megállapítás. *Ha a G_1 és G_2 cirkuláns gráfok ϱ-ekvivalensek, akkor izomorfak is.*

Bizonyítás. Rendeljük hozzá G_1 minden egyes P_i pontjához a G_2 gráf azon $P'_{i'}$ pontját, amelyre $i' \equiv ri \pmod{n}$. Világos, hogy ez a leképezés bijektív. Belátható, hogy az alábbi öt állítás közül a szomszédosak kölcsönösen következnek egymásból:

(1) Van él P_i-ből P_j-be.

(2) $j - i - m_h$ osztható n-nel, ahol m_h $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ alkalmas eleme.

(3) $rj - ri - rm_h$ osztható n-nel.

(4) $j' - i' - rm_h$ osztható n-nel.

(5) Van él $P'_{i'}$-ből $P'_{j'}$-be. ∎

Az 1. megállapítás azt mondja ki, hogy a (2.1) szimbólumokhoz tartozó gráfok körében (rögzített n és k mellett) a ϱ-ekvivalencia finomabb vagy egyenlő partíciót hoz létre, mint az izomorfia.

2.4. Azt a kérdést vetettem fel 1967-ben a Journal of Combinatorial Theory problémarovatában, igaz-e az 1. megállapítás megfordítása [1]. Ezzel a nyolc-tíz soros problémával akkora követ dobtam a problémakör tavába, hogy a keltett hullámok évtizedeken át kavarogtak. Hamarosan kiderült, hogy a megfordítás nem érvényes teljes általánosságban: vannak n számok, amelyekre létezik két egymással izomorf n pontú cirkuláns gráf, amelyek nem ϱ-ekvivalensek. (Tehát az ilyen n-ekre az n pontú cirkuláns gráfoknak a ϱ-ekvivalencia szerinti partíciója valódi finomítása az izomorfia szerinti partíciónak.)

1. példa. Könnyen belátható, hogy a

$$\mathrm{Cay}\,(8; 1, 2, 5), \qquad \mathrm{Cay}\,(8; 1, 5, 6)$$

cirkuláns gráfok között a

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 \\ P'_5 & P'_6 & P'_3 & P'_4 & P'_1 & P'_2 & P'_7 & P'_8 \end{pmatrix}$$

leképezés izomorfiát létesít. Másfelől ez a két gráf nem ϱ-ekvivalens; egyszerűen adódik ugyanis, hogy a $\mathrm{Cay}\,(8; 1, 2, 5)$ gráffal csupán $\mathrm{Cay}\,(8; 3, 6, 7)$ tartozik közös ϱ-ekvivalenciaosztályba; hasonlóképpen a $\mathrm{Cay}\,(8; 1, 5, 6)$ gráffal csak $\mathrm{Cay}\,(8; 2, 3, 7)$.

[6] A relatív prímséget azért kell kikötnünk, mert máskülönben $0, r, 2r, \ldots, (n-1)r$ nem lennének páronként inkongruensek mod n.

Az $n = 8$ esettel egyező a helyzet $n = 9$ esetén is.

2. példa. A

$$\mathrm{Cay}\,(9; 1, 3, 4, 7), \qquad \mathrm{Cay}\,(9; 1, 4, 6, 7)$$

cirkuláns gráfok között

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 & P_9 \\ P_1' & P_5' & P_6' & P_7' & P_2' & P_3' & P_4' & P_8' & P_9' \end{pmatrix}$$

izomorfiát létesít; azonban $\mathrm{Cay}\,(9; 1, 3, 4, 7)$-tel csak $\mathrm{Cay}\,(9; 2, 5, 6, 8)$, továbbá $\mathrm{Cay}\,(9; 1, 4, 6, 7)$-tel csak $\mathrm{Cay}\,(9; 2, 3, 5, 8)$ ϱ-ekvivalens.

Az 1. példát Elspas és Turner [9], a 2. példát Alspach és Parsons [7] konstruálták. A két példára a 3.5. szakaszban még visszatérünk.

2.5. Alspach és Parsons azt is kimutatták a 2. példa általánosításaként ([7], 3. tétel), hogy minden páratlan prímszám négyzete (mint n) esetén megszerkeszthető izomorf, de nem ϱ-ekvivalens cirkuláns gráfpár. Bebizonyították emellett a következőt ([7], 4. tétel):

2. megállapítás. *Ha az n pontú cirkuláns gráfok körében van két izomorf, de nem ϱ-ekvivalens gráf, akkor – tetszőleges pozitív w számot választva – van ilyen gráfpár a wn pontú cirkuláns gráfok körében is.*

A 2. megállapítás igazolásának az az alapgondolata, hogy

(1) veszünk egy (2.3) alakú gráfpárt – legyen ez (G_1, G_2) –, amely gráfok izomorfak és ϱ-inekvivalensek;

(2) mind G_1-nek, mind G_2-nek w példányát tekintjük, ezek a gráfok újra felfoghatók cirkuláns gráfokként;[7]

(3) megmutatjuk, hogy az így előálló két (egymással nyilván izomorf) wn pontú gráfra a ϱ-inekvivalencia is átmegy.

Az előző és a jelen szakaszban (teljes bizonyítások nélkül) vázolt meggondolások összefoglalásaként az alábbi állítást mondhatjuk ki:

1. tétel. *Ha az n szám többszöröse 8-nak vagy egy páratlan prímszám négyzetének, akkor az n pontú cirkuláns gráfok körében a ϱ-ekvivalencia relációja valódi finomítása az izomorfia relációjának.*

---

[7]Ilyen módon nem összefüggő gráf-párat kapunk példa gyanánt. Ha a komplementumokra térünk át, azzal összefüggő gráfok adódnak. (A $\mathrm{Cay}\,(n; m_1, m_2, \ldots, m_k)$ gráf komplementumán azt a cirkuláns gráfot értjük, amelyben az $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ halmaz helyébe az

$$[1, n-1]_* \setminus \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$$

különbség-halmaz lép.)

2.6. Hosszú időn át nyílt kérdés volt, hogy az 1. tétel megfordítása érvényes-e, vagyis hogy az 1. tétel feltevését nem teljesítő n számokra az izomorfia és a ϱ-ekvivalencia szükségképpen egybeesnek-e. Számos idevágó részleteredmény után ezt Muzychuknak sikerült bebizonyítania a [12], [13] munkákban:

2. tétel. *Ha az n, $n/2$, $n/4$ számok egyike négyzetmentes páratlan egész szám, akkor az n pontú cirkuláns gráfok körében a ϱ-ekvivalencia szükséges (és elégséges) feltétele az izomorfiának.*

A cirkuláns gráfok izomorfia-problémájának vizsgálata erősen összekapcsolódik algebrai természetű megfontolásokkal. Muzychuk három cikkében is lényeges szerepet játszanak algebrai következtetések. Ezek a közlemények egyáltalán nem ön-tartalmazóak; a szerző alapvetően felhasználja bennük a permutációcsoportok, valamint a Schur-féle gyűrűk elméletében már ismert fogalmakat és módszereket.

2.7. Mielőtt Muzychuknak a kérdést teljesen tisztázó vizsgálatai [14] vázolására rátérnénk, felhívom az olvasó figyelmét a szélesebb távlatú kutatásokra.

Amivel most foglalkozunk, az nagyjából arra korlátozódik, hogy ciklikus csoportok miként operálnak bizonyos gráfokon. A téma általánosítható úgy, hogy *bármely* véges csoportot megengedünk (nem csak a ciklikusakat), és emellett kombinatorikus struktúráknak valamely másféle osztálya léphet az irányított gráfok helyébe. Az érdeklődő olvasó a már (az 1.4. szakaszban) említett alapozó munkán [8] kívül főképpen Pálfy Péter Pál [15], Brian Alspach [6] és Li Cai Heng [11] közleményei révén nyerhet betekintést az ilyen jellegű eredményekbe és az elmélet nyílt problémáiba.

3. A cirkuláns gráfok izomorfia-problémájáról (a teljes megoldás algoritmusa)

3.1. A legutóbb kimondott két tétel ismeretében még mindig nyitva marad az a kérdés, min múlik két n pontú cirkuláns gráf izomorfiája akkor, ha n az 1. tétel feltevésének eleget tevő szám. Az elméletnek erre is kiterjedő kiegészítése főképpen akkor tanulságos, ha n a legtávolabb esik a négyzetmentességtől, azaz ha prímhatvány.

A problémát végül is Muzychuk válaszolta meg a 41 oldalas [14] közleményében, továbbfejlesztve több szerző előző vizsgálatait (közöttük a saját – részben Reinhard Pöschellel közös – korábbi munkáit is). Ezzel tehát a cirkuláns gráfok izomorfiájának vizsgálata eljutott a teljes megoldáshoz.

Muzychuk két másik idézett cikkéhez hasonlóan a [14] dolgozat bonyolult meggondolásai is erősen támaszkodnak algebrai előismeretekre.

Ebben a fejezetben olyan beállításban fogjuk körvonalazni a [14] munka alapgondolatát, hogy egy Cay $(n;\ m_1, m_2, \ldots, m_k)$ szimbólumból kiindulva miképpen lehet algoritmikusan előállítani mindazon szimbólumokat, amelyek (az izomorfia értelmében) ugyanazt a gráfot határozzák meg, mint amelyet a kiindulásul szolgáló szimbólum.

3.2. A jelen szakaszban és a következőkben (a 3.5. szakasszal bezárólag) arra a speciális esetre korlátozzuk a meggondolásainkat, amikor a (rögzítettnek tekintett) $n\,(\geq 8)$ szám prímhatvány. Feltesszük tehát, hogy $n = p^\alpha$, ahol p prímszám és $\alpha \geq 2$.

A kérdés érdemi tárgyalása előtt a 3.2.–3.3. szakaszokat jó néhány fogalom és jelölés bevezetésének szenteljük.

Amint a csoportelméletből tudjuk, a $[0, p^\alpha - 1]_*$ számhalmaz Abel-féle csoportot alkot a $\bmod p^\alpha$ vett összeadásra nézve. E csoport bármely elemének rendje a

$$p^0\,(=1), p, p^2, p^3, \ldots, p^{\alpha-1}, p^\alpha$$

számok egyike; egyetlen elsőrendű elem van: 0, és a p^β rendű elemek száma $p^\beta - p^{\beta-1}$ (ahol $1 \leq \beta \leq \alpha$).

$[1, p^\alpha - 1]_*$ egy g elemének rendje $p^\alpha / \gcd(g, p^\alpha)$ (itt gcd a legnagyobb közös osztót jelöli), eszerint éppen azok az elemek p^α rendűek, amelyek relatív prímek p-hez.

A $(q_1, q_2, \ldots, q_\alpha)$ sorozatot *kulcsnak* nevezzük, ha tagjai a $[0, \alpha - 1]_*$ halmazból vett számok, és teljesülnek rájuk a

$$0 = q_1 \leq q_2 < 2, \quad q_2 \leq q_3 < 3, \quad q_3 \leq q_4 < 4,$$
$$q_4 \leq q_5 < 5, \quad \ldots, \quad q_{\alpha-1} \leq q_\alpha < \alpha$$

egyenlőtlenségek.

Tekintsünk egy $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_\alpha)$ kulcsot; legközelebbi célunk $[0, p^\alpha - 1]_*$-nak egy $\Sigma(\mathbf{q})$ partícióját értelmezni ($\mathbf{q}$-tól függően). $\Sigma(\mathbf{q})$ a rend szerinti osztályozásnál finomabb – vagy azzal egyenlő – partíció lesz; másképpen mondva, a $\Sigma(\mathbf{q})$ szerint közös osztályba tartozó elemeknek közös a rendje is. Az $1 (= p^0)$ rendű elem – azaz 0 – egymagában képez osztályt; amennyiben pedig g is, h is p^β rendű elem $(1 \leq \beta \leq \alpha)$, úgy megállapodunk abban, hogy $\Sigma(\mathbf{q})$ pontosan a

$$p^{\alpha - q_\beta} \mid h - g$$

oszthatóság teljesülésekor ejti egybe g-t és h-t. A $\Sigma(\mathbf{q})$ partíció úgy adódik, hogy ezt az eljárást β minden lehetséges értékére (0-tól α-ig) végrehajtjuk.[8]

3.3. A $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_\alpha)$ számsorozatot *általánosított szorzónak* nevezzük [generalized multiplier], ha elemei

$$[1, p^\alpha - 1]_* \backslash \{p, 2p, 3p, \ldots, p^\alpha - p\}$$

-beli (nem feltétlenül különböző) számok. A $\mathbf{t}$ általánosított szorzó $[0, p^\alpha - 1]_*$-nak

[8]Mivel $q_1 = 0$, a p rendű elemek is egymagukban alkotnak osztályokat.

egy önmagába való $f(\mathbf{t})$ leképezését hozza létre az alábbi módon: valahányszor a $g(\in [0, p^\alpha - 1]_*)$ számnak a p alapú számrendszerben vett előállítása

$$g = g_0 + g_1 p + g_2 p^2 + \ldots + g_{\alpha-1} p^{\alpha-1}$$

(ahol $g_0, g_1, \ldots, g_{\alpha-1}$ a $[0, p-1]_*$ halmazba tartoznak), úgy értelmezzük a $g^{f(\mathbf{t})}(\in [0, p^\alpha - 1]_*)$ képet

$$g^{f(\mathbf{t})} \equiv t_\alpha g_0 + t_{\alpha-1} g_1 p + t_{\alpha-2} g_2 p^2 + \\ + t_{\alpha-3} g_3 p^3 + \ldots + t_1 g_{\alpha-1} p^{\alpha-1} \pmod{p^\alpha}$$

által.

3. megállapítás. *Az $f(\mathbf{t})$ leképezés permutációja $[0, p^\alpha - 1]_*$-nak, és annak* 0 *elemét önmagába viszi át.*

Tekintsünk egy $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_\alpha)$ kulcsot és egy $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_\alpha)$ általánosított szorzót. Azt mondjuk, hogy $\mathbf{t}$ *kitüntetett* általánosított szorzó $\mathbf{q}$-ra vonatkozóan, ha teljesülnek az alábbi (3.1) és (3.2) feltételek:

$$(3.1) \qquad \begin{cases} t_2 \equiv t_1 \pmod{p^{1-q_2}}, & t_3 \equiv t_2 \pmod{p^{2-q_3}}, \\ t_4 \equiv t_3 \pmod{p^{3-q_4}}, \ldots, t_\alpha \equiv t_{\alpha-1} \pmod{p^{\alpha-1-q_\alpha}}; \end{cases}$$

$$(3.2) \qquad t_1 < p^{1-q_1} (= p), \quad t_2 < p^{2-q_2}, \quad t_3 < p^{3-q_3}, \ldots, \quad t_\alpha < p^{\alpha - q_\alpha}.$$

3.4. Az előző két szakaszban foglalt előkészületek után rátérhetünk a cirkuláns gráfokat jellemző szimbólumok vizsgálatára. Tegyük fel ismét, hogy $n\,(\geq 8)$ prímhatvány, éspedig $n = p^\alpha$ (ahol $\alpha \geq 2$). Induljunk ki a

$$\mathrm{Cay}\,(n; m_1, m_2, \ldots, m_k)$$

szimbólumból ($1 \leq m_1 < m_2 < \ldots < m_k < n$), jelöljük ezt a szimbólumot $\mathfrak{S}$-sel és az $\mathfrak{S}$ által meghatározott cirkuláns gráfot G-vel. Az a célunk, hogy előállítsuk mindazon szimbólumokat, amelyek (az izomorfia értelmében) ugyanazt a G gráfot határozzák meg. (A tekintetbe jövő szimbólumokban az n és k számok nyilván közösek.)

2. konstrukció. A konstrukció négy lépésben történik.

1. *lépés.* Jelöljük $\Pi(\mathfrak{S})$-sel az $[1, n-1]_*$ halmaznak azt a partícióját, amelynek osztályai

$$\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} \quad \text{és} \quad [1, n-1]_* \backslash \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}.$$

Tekintsük mindazon $\mathbf{q}$ kulcsok $Q(\mathfrak{S})$ halmazát, amelyekre a $\Sigma(\mathbf{q})$ partíció finomabb vagy egyenlő, mint $\Pi(\mathfrak{S})$.

2. *lépés.* Érvényes a következő állítás: *a $Q(\mathfrak{S})$ partícióhalmaznak van olyan eleme, hogy ennek a $Q(\mathfrak{S})$-beli többi partíciók mind finomításai.* Jelöljük ezt a partíciót $\Sigma(\mathfrak{S})$-sel, értelmezzük a $\mathfrak{q}(\mathfrak{S})$ kulcsot $\Sigma(\mathfrak{q}(\mathfrak{S})) = \Sigma(\mathfrak{S})$ által.

3. *lépés.* Tekintsük azokat az általánosított szorzókat, amelyek kitüntetettek $\mathfrak{q}(\mathfrak{S})$-re vonatkozóan; legyen az összes ilyen általánosított szorzó halmaza $T(\mathfrak{S})$. Emlékezzünk vissza $f(\mathbf{t})$ definíciójára (a 3.3. szakaszban). Képezzük az

$$(3.3) \qquad \{m_1, m_2, \dots, m_k\}^{f(\mathbf{t})}$$

számhalmazokat, ahol $\mathbf{t}$ végigfut $T(\mathfrak{S})$ elemein.

4. *lépés.* Tekintsük a (3.3) számhalmazok mindegyikére a

$$(3.4) \qquad \mathrm{Cay}\,(n; m_1', m_2', \dots, m_k')$$

szimbólumot, ahol az $m_1', m_2', \dots, m_k'$ számsorozatot a (3.3) halmazból nyerjük, növekvően rendezve a számokat.

3. tétel. *A (3.4) alakban kapott szimbólumok mindegyike G-vel izomorf gráfot határoz meg. Az eljárásunk a G-vel izomorf gráfot meghatározó összes szimbólumot előállítja.*

3.5. Térjünk vissza a 2.4. szakaszban szereplő két példára, és hajtsuk végre a 3.4. szakaszban leírt eljárást a

$$\mathrm{Cay}\,(8; 1, 2, 5) \quad \text{és} \quad \mathrm{Cay}\,(9; 1, 3, 4, 7)$$

szimbólumokból kiindulva.

1. példa (folytatás). Legyen $\mathfrak{S} = \mathrm{Cay}\,(8; 1, 2, 5)$. Ekkor az első lépésben a

$$\Pi(\mathfrak{S}) = \langle \{1, 2, 5\}, \{3, 4, 6, 7\} \rangle$$

partíció adódik.

A jelen esetben öt kulcs létezik.

$$\mathbf{q}^{(1)} = (0,0,0), \quad \mathbf{q}^{(2)} = (0,0,1), \quad \mathbf{q}^{(3)} = (0,0,2), \quad \mathbf{q}^{(4)} = (0,1,1), \quad \mathbf{q}^{(5)} = (0,1,2).$$

Azt, hogy az $[1,7]_*$ halmaz elemeit a kulcsokhoz rendelt $\Sigma(\mathbf{q}^{(1)}), \dots, \Sigma(\mathbf{q}^{(5)})$ partíciók miként bontják osztályokra (rendek szerint), az 1. táblázatban találjuk meg.

Az 1. táblázatot a $\Pi(\mathfrak{S})$ partícióval egybevetve azt kapjuk, hogy a példánk esetében $Q(\mathfrak{S})$ a $\mathbf{q}^{(1)}$ és $\mathbf{q}^{(2)}$ partíciókból áll, továbbá $\mathfrak{q}(\mathfrak{S}) = \mathbf{q}^{(2)}$. Az, hogy egy (t_1, t_2, t_3) általánosított szorzó kitüntetett-e $\mathbf{q}^{(2)}$-re vonatkozóan, a

$$t_2 \equiv t_1 \pmod 2, \qquad t_3 \equiv t_2 \pmod 2,$$

$$t_1 < 2, \quad t_2 < 4, \quad t_3 < 4$$

Partíció / Rend	$\Sigma(\mathbf{q}^{(1)})$	$\Sigma(\mathbf{q}^{(2)})$	$\Sigma(\mathbf{q}^{(3)})$	$\Sigma(\mathbf{q}^{(4)})$	$\Sigma(\mathbf{q}^{(5)})$
2	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{4\}$
4	$\{2\},\{6\}$	$\{2\},\{6\}$	$\{2\},\{6\}$	$\{2,6\}$	$\{2,6\}$
8	$\{1\},\{3\},\{5\},\{7\}$	$\{1,5\},\{3,7\}$	$\{1,3,5,7\}$	$\{1,5\},\{3,7\}$	$\{1,3,5,7\}$

1. táblázat

feltételek teljesülésén múlik.[9] E megszorításokat tekintetbe véve $T(\mathfrak{S})$ az alábbi négy általánosított szorzóból áll:

$$\mathbf{t}^{(1)} = (1,1,1), \quad \mathbf{t}^{(2)} = (1,1,3), \quad \mathbf{t}^{(3)} = (1,3,1), \quad \mathbf{t}^{(4)} = (1,3,3).$$

Az $(1,2,5)$ sorozatot a fenti általánosított szorzókhoz rendelt $f(\mathbf{t}^{(1)})$, $f(\mathbf{t}^{(2)})$, $f(\mathbf{t}^{(3)})$, $f(\mathbf{t}^{(4)})$ permutációk rendre az $(1,2,5)$, $(3,2,7)$, $(1,6,5)$, $(3,6,7)$ sorozatokba viszik át.

Azt nyertük az $\mathfrak{S} = \mathrm{Cay}\,(8;1,2,5)$ szimbólumot alapul véve, hogy (magán $\mathfrak{S}$-en kívül) a

$$\mathrm{Cay}\,(8;2,3,7), \quad \mathrm{Cay}\,(8;1,5,6), \quad \mathrm{Cay}\,(8;3,6,7)$$

szimbólumok határozzák meg ugyanazt a gráfot (az izomorfia értelmében), mint amelyet $\mathfrak{S}$.

2. példa (folytatás). Legyen most $\mathfrak{S} = \mathrm{Cay}\,(9;1,3,4,7)$. Ekkor az első lépésben a

$$\Pi(\mathfrak{S}) = \big\langle \{1,3,4,7\}, \{2,5,6,8\} \big\rangle$$

partíciót kapjuk. Két kulcs van: $\mathbf{q}^{(1)} = (0,0)$ és $\mathbf{q}^{(2)} = (0,1)$. Az $[1,8]_*$ halmaz 3 rendű elemei: 3 és 6 egymagukban képeznek osztályokat mind $\Sigma(\mathbf{q}^{(1)})$, mind $\Sigma(\mathbf{q}^{(2)})$ szerint; a 9 rendű elemeket $\Sigma(\mathbf{q}^{(1)})$ egyelemű osztályokra bontja, $\Sigma(\mathbf{q}^{(2)})$ szerint pedig ezek az elemek az $\{1,4,7\}$ és $\{2,5,8\}$ osztályokat alkotják. Amint az első példában, most is $Q(\mathfrak{S}) = \{\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}\}$ és $\mathfrak{q}(\mathfrak{S}) = \mathbf{q}^{(2)}$. Egy (t_1, t_2) általánosított szorzó éppen akkor kitüntetett $\mathbf{q}^{(2)}$-re vonatkozóan, ha kielégíti a $t_1 < 3$, $t_2 < 3$ feltételeket.

$T(\mathfrak{S})$-et ez a négy általánosított szorzó képezi:

$$\mathbf{t}^{(1)} = (1,1), \quad \mathbf{t}^{(2)} = (1,2), \quad \mathbf{t}^{(3)} = (2,1), \quad \mathbf{t}^{(4)} = (2,2).$$

Az $(1,3,4,7)$ sorozatot $f(\mathbf{t}^{(1)})$ helyben hagyja; $f(\mathbf{t}^{(2)})$, $f(\mathbf{t}^{(3)})$ és $f(\mathbf{t}^{(4)})$ pedig rendre a $(2,3,5,8)$, $(1,6,4,7)$, $(2,6,8,5)$ sorozatokba viszik át. Ennélfogva $\mathfrak{S}$-sel izomorf gráfot pontosan (önmaga és) a

$$\mathrm{Cay}\,(9;2,3,5,8), \quad \mathrm{Cay}\,(9;1,4,6,7), \quad \mathrm{Cay}\,(2;5,6,8)$$

szimbólumok határoznak meg.

[9] A teljesség kedvéért a kongruencia-feltételeket is feltüntettük, habár ezeknek a jelen példában nincs tényleges korlátozó hatásuk.

3.6. Az előző négy szakaszban megismertük Muzychuk eljárását azon speciális körülmények között, amikor n-nek (a pontok számának) egyetlen prímosztója van. Az egyszerűnek aligha mondható eljárás még bonyolultabbá válik a megszorítást elejtve, azaz amikor $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_d^{\alpha_d}$, ahol $p_1, p_2, \dots, p_d$ páronként különböző prímszámok. Az elbonyolódás inkább csak a tényleges végrehajtást érinti; abból adódik, hogy a módszer alapgondolata változatlan marad ugyan, de külön-külön alkalmazzuk azt a p_i prímszámok mindegyikére ($1 \le i \le d$).

Befejezésül röviden utalok rá, miképpen lesz összetettebbé az eljárás az általános esetben.

Amikor n-et prímhatványnak tettük fel, egyetlen számsorozat képezte a $\mathbf{q}$ kulcsot. Az általános esetben $\mathbf{q}$ szerepét kulcsoknak egy $\left(\mathbf{q}^{[1]}, \mathbf{q}^{[2]}, \dots, \mathbf{q}^{[d]}\right)$ sorozata veszi át, ahol minden egyes $\mathbf{q}^{[i]}$ végigfut (egymástól függetlenül) a $p_i^{\alpha_i}$ prímhatványra vonatkozóan képezhető kulcsokon.[10] Ezzel analóg módon a $\Sigma(\mathbf{q})$ partíció helyébe ezúttal egy

$$\left(\Sigma\left(\mathbf{q}^{[1]}\right), \Sigma\left(\mathbf{q}^{[2]}\right), \dots, \Sigma\left(\mathbf{q}^{[d]}\right)\right)$$

partíciósorozat lép (ahol $\Sigma\left(\mathbf{q}^{[i]}\right)$ a $\left[0, p_i^{\alpha_i} - 1\right]_*$ számhalmaznak egy partíciója), továbbá általánosított szorzók gyanánt most a $\left(\mathbf{t}^{[1]}, \mathbf{t}^{[2]}, \dots, \mathbf{t}^{[d]}\right)$ sorozatok lépnek fel, ahol $\mathbf{t}^{[i]}$ a $p_i^{\alpha_i}$ prímhatvány szerinti (α_i hosszúságú) általánosított szorzókon fut végig.

A $\left(\mathbf{t}^{[1]}, \mathbf{t}^{[2]}, \dots, \mathbf{t}^{[d]}\right)$ általánosított szorzóhoz rendelt f leképezés (a felső index kiírásával ne bonyolítsuk a jelölést) most úgy hat a $[0, n-1]_*$ számhalmazon, hogy a g számot a

$$g_i \equiv g \pmod{p_i^{\alpha_i}}, \quad g_i \in \left[0, p_i^{\alpha_i} - 1\right]_*$$

feltételek által meghatározott számok $(g_1, g_2, \dots, g_d)$ sorozatával helyettesítjük, és mindegyik g_i-re az $f\left(\mathbf{t}^{[i]}\right)$ leképezést alkalmazzuk; végül pedig g^f az a szám lesz $\left(\in [0, n-1]_*\right)$, amely a

$$g^f \equiv g_i^{f\left(\mathbf{t}^{[i]}\right)} \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

feltételeket teljesíti.

4. A gráfok autonóm partícióiról

4.1. Az utolsó fejezetben (és az ahhoz csatlakozó négy függelékben) az autonóm partíciók – az irányított gráfok ponthalmazain tekintett partíciók egy típusa – játszanak központi szerepet (amint azt az 1.5. szakaszban már említettem). A fogalmat a 4.2. szakasz elején definiáljuk.

A fejezetben (amikor világosan mást nem mondunk) összefüggő (véges) gráfokról beszélünk.

[10] A kulcs tehát most sorozatokból álló sorozat. Tanácsos lehet a benne szereplő számokat kétdimenziós táblázatban elrendezni. Ez a táblázat azonban nem mátrix (mivel a sorok hosszúságai – az α_i számok – nem szükségképpen egyenlők), és így oszlopok sincsenek.

Állandóan fel fog lépni a kvázi-funkcionális gráfnak és a funkcionális gráfnak az 1.6. szakaszban értelmezett fogalma; használni fogjuk továbbá az ugyanott bevezetett G/π és $\delta(A)$ jelöléseket.

Ha a gráf A pontjának a kilépő foka 0 (azaz $\delta(A) = \emptyset$), akkor A-t *nyelőnek* nevezzük.[11]

A jelen fejezetben mondottak általában a [3] és [10] munkákat követik (mint azok tartalmának vázlatos áttekintése). Ki fog tűnni, hogy

az autonóm partíciók áttekintésének *általános* kérdése visszavezethető arra, hogy egy *speciális* esetben – éspedig a kvázi-funkcionális gráfok körében – vizsgáljuk a kérdést, továbbá hogy

külön nehézséggel jár azon gráfok kezelése, amelyekben van nyelő.

A 4. fejezet utáni négy függelék közül az első három (rendre) a 4.2., 4.6., 4.7. szakaszokhoz csatlakozik; az utolsó függelékben (F-4.-ben) mondottak a 4. fejezet egészét érintik.

Az F-2. függelék a kvázi-funkcionális, de nem funkcionális gráfok körében szól az autonóm partíciók meghatározásáról (erre a részkérdésre sem [3], sem [10] nem tér ki). Az F-3. függelék beiktatását az indokolja, hogy a kritérium, amelyet [3]-ban a nem összefüggő gráfok autonóm partícióiról kimondtam, az elegendőségi irányban nem helytálló.

4.2. Legyen π a G gráf pontjai halmazának egy partíciója. Ha teljesül az

$$(4.1) \qquad \big(A \equiv B \pmod{\pi} \;\&\; C \in \delta(A) \;\&\; D \in \delta(B)\big) \implies C \equiv D \pmod{\pi}$$

implikáció, akkor π-t *autonóm* partíciónak[12] nevezzük. A (4.1) feltétel így is megfogalmazható: valahányszor $\mathfrak{H}$ a pontok egy osztálya π szerint, akkor van olyan π szerinti $\mathfrak{K}$ osztály, hogy

$$\bigcup_{A \in \mathfrak{H}} \delta(A) \subseteq \mathfrak{K}.$$

4. megállapítás. *A G gráf ponthalmazának egy π partíciója akkor és csak akkor autonóm, ha a G/π faktorgráf kvázi-funkcionális.*

A megállapítás igazolásául elég azt észrevennünk, hogy amennyiben létezik G-ben olyan pontnégyes, amelyre a (4.1) formula premisszái teljesülnek, de a konklúzió nem, úgy van a faktorgráfban olyan F pont, hogy $|\delta(F)| > 1$.

1. korollárium. *Ha a nyelő nélküli G gráfban π autonóm partíció, akkor G/π funkcionális gráf.*

---

[11] Az ezzel duális fogalom, a forrás, nem fog előfordulni. (A-t akkor nevezzük forrásnak, ha a belépő foka 0.)

[12] Az „autonóm partíció" elnevezéssel Klossz [10] munkáját követem, [3]-ban ugyanezeket az osztályozásokat P tulajdonságú partícióknak hívtam. – Az idézett két közleményt is tanulmányozó figyelmes olvasónak aligha fog nehézséget okozni, hogy az o, $\pi_{\max}$, π^* jelöléseket a [3] és [10] publikációk más-más értelemben használják.

Az 1. korollárium nem marad érvényben, ha a nyelők kizárását elhagyjuk; erre az F-1. függelékben térünk vissza.

4.3. A [3] cikk második fejezetében az összefüggő funkcionális gráfok autonóm partícióinak konstruktív áttekintésével foglalkoztam. A konstrukciónak az az alapgondolata, hogy három szakaszban alakítjuk ki egy G funkcionális gráfnak valamely π autonóm partícióját:

(1) Kiválasztjuk G (egyetlen) ciklusa hosszának egy d osztóját. (A bevezetendő π partíciónak d olyan osztálya lesz, amely tartalmaz legalább egy ciklikus pontot.)

(2) Kijelölünk $\bigl(B, \delta_1(B)\bigr)$ alakú bizonyos pontpárokat, ahol B aciklikus pont. (Ezek a pontpárok fogják megszabni azt, hogy a π szerinti azon osztályok, amelyekben van ciklikus pont, meddig terjednek „kifelé" a ciklustól.) Legyen az itt szereplő B pontok halmaza $\mathfrak{B}$ (ez üres is lehet).

(3) Célszerű módon további π-osztályokba soroljuk azokat a pontokat, amelyeket $\mathfrak{B}$ elválaszt a ciklustól (magukat $\mathfrak{B}$ elemeit is ideértve).

A fenti eljárás első szakaszában azonnal láthatók a választási lehetőségek (d gyanánt 1-et is kiszemelhetjük, a ciklus hosszát is). Azokra a (természetesen adódó) korlátozó feltételekre itt nem tértem ki, amelyek leszűkítik a választási szabadságunkat – a pontpárok kijelölése, illetve az osztályokba sorolás folyamán – a második és a harmadik fázisban.

4.4. Az előző szakaszban vázolt konstrukcióban a funkcionális gráfokra szorítkoztunk. Amennyiben túl akarunk lépni a kilépő fokszámokra vonatkozó feltételen, úgy egyfelől azt a lehetőséget is tekintetbe kell vennünk, hogy $\delta(A)$ üres (vagyis a gráf tartalmaz nyelőt), másfelől arra az esetre is ki kell terjeszteni a meggondolásainkat, amikor van olyan A pont, hogy $\bigl|\delta(A)\bigr| > 1$.

Legyen G tetszőleges (véges) összefüggő irányított gráf; vezessük be π^*-ot a $\mathfrak{V}(G)$ halmaz azon partíciójaként, amely az összes autonóm partíciók metszete. Két autonóm partíció metszete újra autonóm, ebből (a végesség révén) π^* autonóm volta is adódik. Azt mondhatjuk tehát, hogy π^* a *minimális autonóm partíciója* G-nek (vagyis az autonóm partíciók között a legfinomabb). Világos, hogy a nem kvázi-funkcionális gráfokra π^* különbözik a legfinomabb pontpartíciótól ($\pi_{\min}$-től); tudjuk továbbá, hogy a G/π^* faktorgráf kvázi-funkcionális (4. megállapítás).

Legyen χ a $\mathfrak{V}(G)$ halmaz természetes leképezése G/π^* pontjainak halmazára. Tekintsünk $\mathfrak{V}(G/\pi^*)$-ban egy σ partíciót, vezessük be $\mathfrak{V}(G)$-ben a σ^∇ partíciót

$$A \equiv B \pmod{\sigma^\nabla} \iff \chi(A) \equiv \chi(B) \pmod{\sigma}$$

által. Azt mondjuk ekkor, hogy σ^∇ a σ *visszavetítésével* előálló partíció.

4.5. Arra a problémára térünk rá, hogy *tetszőleges* összefüggő G gráf autonóm partícióiról miként tudunk áttekintést adni (a G/π^* kvázi-funkcionális gráf vizsgálatára támaszkodva). *Ez a feladat a következő öt részkérdés megvilágításával oldható meg.*

(A) Terjesszük ki a funkcionális gráfok autonóm partícióiról ismert leírást (4.3. szakasz) a kvázi-funkcionális gráfokra.

(B) Adjunk konstruktív módszert π^* meghatározására a nem kvázi-funkcionális gráfokban (azaz amelyekben van olyan A pont, hogy $|\delta(A)| \geq 2$).

(C) Igaz-e, hogy G/π^* két különböző autonóm partíciójának visszavetítésével két különböző partíciót kapunk (G-ben)?

(D) Igaz-e, hogy autonóm partíció visszavetítésével ismét autonóm partíció adódik?

(E) Igaz-e, hogy G autonóm partíciói mind előállnak G/π^* egy-egy alkalmas autonóm partíciójának visszavetítésével?

4.6. A (C)-ben foglalt állítás rögtön belátható; a helyzet átgondolásával (D)-re és (E)-re is igenlő választ kapunk.[13] Ezzel azt is nyertük, hogy G *autonóm partícióinak hálója izomorf* G/π^* *autonóm partícióinak hálójával.*

Az (A) kérdéssel kapcsolatban most csak egy apró észrevételre szorítkozom, a témára az F-2. függelékben fogok tüzetesebben visszatérni. A kvázi-funkcionális, de nem funkcionális (összefüggő) gráfok éppen azok az irányított fák, amelyekben létezik egy olyan R pont, hogy a gráf bármely éle ezen R pont – a *gyökérpont* – felé (pontosabban: az R-hez közelebbi végpontja felé) van irányítva.

Térjünk most rá a (B) részkérdésre. A nyelő nélküli összefüggő gráfok esetében a [3] közlemény III. fejezetében adtam eljárást π^* előállítására, a módszer két fázisból áll (a második fázis egy kétváltozós reláció tranzitív kiterjesztése).

A konstrukciót Borisz Klossz fejlesztette tovább [10] úgy, hogy nyelők léte esetén is érvényes maradjon. Klossz módszerében partícióknak egy $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ növekvő sorozatát képezzük több lépésben; most a lépések mindegyike áll két fázisból. Részletesebben kifejtve:

3. konstrukció. Az eljárás első lépése a G gráf ponthalmazának legfinomabb (elemenkénti) $\pi_{\min}$ partíciójából indul ki mint π_0-ból. A lépések mindegyike az alábbi módon megy végbe:

(a) az i-edik lépés első fázisában azt a – reflexív és szimmetrikus, de nem szükségképpen tranzitív – τ_i relációt képezzük, amely pontosan akkor érvényes a C és D pontokra, ha igaz az alábbi két feltétel legalább egyike:

(α) $C \equiv D \pmod{\pi_{i-1}}$,

(β) vannak olyan A és B pontok, hogy

$$A \equiv B \pmod{\pi_{i-1}} \ \&\ C \in \delta(A) \ \&\ D \in \delta(B);$$

(b) a második fázisban τ_i tranzitív lezártjaként vezetjük be π_i-t.

Világos, hogy az eljárás véges sok lépés után befejeződik egy π_k partícióval.

[13](C) akkor is érvényes, ha nem tesszük fel a két partíció autonóm voltát. (E)-ben nyilván lényeges, hogy π^* az autonóm partíciók legfinomabbika.

Klossz igazolta, hogy a módszer valóban eléri a célt:

4. tétel. *Legyen G tetszőleges összefüggő gráf. A 3. konstrukció útján nyert π_k partíció egyenlő π^*-gal.*

4.7. A véges összefüggő gráfok autonóm partícióinak vizsgálata után az a kérdés kerül előtérbe, hogy mit mondhatunk a gráfok autonóm partícióiról, ha feladjuk az összefüggőség, illetve a végesség megkövetelését.

Amennyire tudom, az elmélet ilyen irányú kiterjesztése nyílt kérdés.

A nyelő nélküli, nem összefüggő (véges) gráfok ügyét elintézettnek véltem [3]-ban egy rövid észrevétellel (§ 10, Proposition 8). Az itt megfogalmazott kritérium azonban *téves*. A szükségesség („only if") valóban könnyen belátható. Az elegendőség („if") viszont nem érvényes, amint erre az F-3. függelékben példát fogok mutatni.

A végtelen gráfok esetével magam nem foglalkoztam; Klossz egy megjegyzése szerint ([10], 326. oldal, Remark 1) az remélhető, hogy az elméletnek a végtelen gráfokra való átvitele nem jár nehézséggel.

4.8. Az autonóm partíció fogalmát – amint azt a 4.2. szakaszban a (4.1) implikáció által értelmeztük – az algebrai struktúrákban jól ismert kongruencia-fogalmak mintájára vezettük be. Egy, a (4.1)-től eltérő partíció-típushoz jutunk úgy, hogy az alábbi módon felcseréljük az éllel való elérhetőség és a közös osztályba tartozás szerepét:

$$(4.2) \qquad \big(C \in \delta(A) \ \&\ A \equiv B \pmod{\varrho} \ \&\ C \equiv D \pmod{\varrho}\big) \ \Rightarrow\ D \in \delta(B).$$

Az olvasónak módjában áll véleményt alkotni arról, hogy a (4.1) és (4.2) feltételek közül melyik a természetesebb átvétele az algebrában ismert kongruencia-fogalmaknak.

A (4.2) kikötés egy változatára (pontosabban: az annak megfelelő, eléggé speciális homomorfizmus-fogalomra) épülnek az [5] közleményben levő meggondolások.

Függelékek a 4. fejezethez

F-1. Arra, hogy a nyelők megengedése esetében az 1. korollárium nem szükségképpen igaz, példát szolgáltat bármely kvázi-funkcionális G gráf, amelyben van nyelő. G-ben (amint minden kvázi-funkcionális gráfban) a pontok halmazának mindkét triviális partíciója autonóm; vegyük közülük azt a $\pi_{\min}$ partíciót, amely egyesével tagolja osztályokra G pontjait. Ebben az esetben visszakapjuk G-t $G/\pi_{\min}$ gyanánt; amely pont nyelő volt, az nyelő marad.

Természetes, hogy az olvasó másféle (akár árnyalatnyival is, de kevésbé triviális) példát is kívánna látni. Tekintsük evégett azt a három ponttal – A-val, B-vel,

C-vel – bíró gráfot, amelyben két él van: AB és AC. Az a π partíció, amelynek $\{A\}$ és $\{B, C\}$ az osztályai, autonóm; emellett G/π nem funkcionális (a $\{B, C\}$ osztálynak megfelelő pont nyelő benne).

F-2. Tekintsünk egy G irányított fát, amelyben mindegyik él az R gyökérpont felé irányul. Kézenfekvő gondolat úgy áttekinteni G autonóm partícióit, hogy hozzáveszünk G-hez egy hurkot az R ponton és az így előálló G' funkcionális gráfnak határozzuk meg az autonóm partícióit. A pontosabb meggondolások azt mutatják, hogy ezzel a módszerrel nem kapjuk meg az *összes* autonóm partícióit G-nek. Az eljárásnak az alább következő konstrukcióban kialakított továbbfejlesztése azonban már célravezetőnek fog bizonyulni.

Értsük a G gyökeres fa egy A pontjának az $\omega(A)$ *magasságán* az A-ból R-be vivő irányított út hosszát (azaz hogy hány élt tartalmaz). Amennyiben π autonóm partíció G-ben, úgy nevezzük π *tágasságának* – és jelöljük $\tau(\pi)$-vel – a legkisebb olyan pozitív számot, hogy van G-ben $\tau(\pi)$ magasságú B pont, amelyre $B \equiv R \pmod{\pi}$; ha pedig nincs ilyen pozitív szám, akkor legyen $\tau(\pi) = 0$.

4. konstrukció.

(i) Tekintsünk egy irányított gyökeres G fát. Válasszunk egy j nemnegatív egész számot, amely nem nagyobb, mint az $\omega(A)$ magasságok maximuma.

(ii) Ha j pozitív, akkor vegyük hozzá G-hez az $R_1, R_2, \ldots, R_j$ pontokat és az

$$RR_1,\ R_1R_2,\ R_2R_3,\ \ldots,\ R_{j-1}R_j,\ R_jR$$

éleket. Amennyiben $j = 0$, úgy vegyünk fel egy hurkot az R gyökérponton. Jelöljük az ezáltal előálló funkcionális gráfot G'-vel.

(iii) Képezzük G'-nek azokat az autonóm partícióit a [3] közlemény II. fejezetében leírt – és a korábbi 4.3. szakaszban vázolt – eljárás szerint, amelyek olyanok, hogy

  (a) az $R_1, R_2, \ldots, R_j$ pontok egyike sincs közös partíció-osztályban R-rel,[14] és

  (b) amennyiben j-t pozitívnak választottuk, úgy olyan módon jelöljük ki $\mathfrak{B}(\not\ni R)$ elemeit, hogy legyen G-ben $j+1$ hosszúságú irányított út, amely R-ben végződik, és amelynek egy pontja sem tartozik $\mathfrak{B}$-be.[15]

(iv) Az előző lépésben nyert partíciókat alakítsuk át G partícióivá a (ii) lépésben hozzávett pontok és élek elhagyásával.

Az eljárás végiggondolása a következő állításra vezet:

5. megállapítás. *Ha $j > 0$, akkor a 4. konstrukció éppen a G gyökeres fa $j+1$ tágasságú autonóm partícióit szolgáltatja. A $j = 0$ esetben a konstrukció révén a 0 és az 1 tágasságú partíciókat kapjuk.*[16]

[14] Ennélfogva a d szám szerepét most $j+1$ játssza.

[15] Ez a feltétel azt biztosítja, hogy az R gyökérpontot tartalmazó partíció-osztálynak legyen R-től különböző eleme.

[16] Aszerint adódik 0 vagy 1 tágasságú partíció, hogy R egymaga képez-e osztályt, vagy sem.

F-3. Idézzük fel először, mit mond az észrevétel ([3], § 10, Proposition 8) szükségességi állítása.

Legyen G olyan nyelő nélküli gráf, amely a G_1 és G_2 gráfok diszjunkt egyesítése. Tekintsünk G-ben egy π partíciót. Jelöljük az A pontot tartalmazó (π szerinti) osztályt $[A]_\pi$-vel; nevezzük ezt vegyes osztálynak, ha G_1-beli pontot is, G_2-beli pontot is tartalmaz. Legyenek π_1, π_2 a π partíció leszűkítései G_1-re, illetve G_2-re. A szükségesség ezek után így mondható ki:

A π partíció csak akkor autonóm, ha

(α) *π_1 és π_2 autonóm partíciók, és*

(β) *amennyiben $[A]_\pi$ vegyes osztály, és létezik G-ben az AC él, úgy $[C]_\pi$ is vegyes osztály.*

Lássuk most a példát, amely cáfolja a fenti szükségességi állítás megfordítását.

3. példa. Legyen G az a (funkcionális) nem összefüggő gráf, amelynek pontjai A, B, C, D, E, F, és amelyben

$$\delta(A) = \{B\}, \quad \delta(B) = \{C\}, \quad \delta(C) = \{D\},$$

$$\delta(D) = \{A\}, \quad \delta(E) = \delta(F) = \{F\}.$$

A G gráfban az

$$\langle\{A, C, E\}, \{B, D, F\}\rangle$$

pontpartíció nem autonóm, habár eleget tesz az (α), (β) feltételeknek.

F-4. Tudjuk, hogy az autonóm partíció [3]-ban bevezetett fogalma – amint azt az 1.5. szakaszban vázoltuk és a 4.2. szakaszban definiáltuk – analógiában áll az absztrakt algebra különféle területein jól ismert kongruencia-fogalmakkal. Ezt továbbgondolva észrevehetjük a hasonlóságot az 1.6. szakaszban értelmezett G/π faktorgráfok és a faktorstruktúrák között (amint az utóbbiak egy-egy algebrai struktúratípus elméletében fellépnek). Felidézhetjük továbbá azt az összefüggést az algebrai elméletekben, amely egy $\mathbf{S}$ struktúra kongruenciái és az $\mathbf{S}$-sel mint ősképpel bíró homomorfizmusok között fennáll.

A kongruenciák és a faktorstruktúrák közötti kapcsolat az algebra területén meglehetősen erős. A csoportelméletben például igaz az, hogy amennyiben egy $\mathfrak{G}$ csoport valamely $\mathfrak{H}$ részhalmazát vesszük, úgy G-nek *legfeljebb egy* olyan π kongruenciája van, hogy $\mathfrak{H}$ éppen egy osztályt képez π szerint, ennélfogva (π létezése esetén) a $\mathfrak{G}/\pi$ faktorcsoport *egyértelműen* meg van határozva ($\mathfrak{G}$ és) $\mathfrak{H}$ által.

A gráfok pontpartícióit véve kevésbé szigorúak a viszonyok. *Bármely* π partíciót tekintjük is, értelmezve van a (nem feltétlenül funkcionális) G/π faktorgráf, tehát egy π szerinti osztály nem határozza meg azt, miképpen osztja fel π az illető osztályon kívüli pontokat. Az persze most is érvényes, hogy G/π meg van határozva G és π által.

Annak a kapcsolatnak, amely valamely G gráf és egy G/π faktorgráfja között fennáll, az alábbi homomorfizmus-fogalom felel meg:

a G gráf ponthalmazának a H gráf ponthalmazára való (szürjektív) χ leképezését homomorfizmusnak mondjuk, ha

(φ) amennyiben $B \in \delta_G(A)$, úgy $\chi(B) \in \delta_H(\chi(A))$; és

(ψ) amennyiben $\chi(B) \in \delta_H(\chi(A))$, úgy vannak G-nek olyan C és D pontjai, hogy

$$\chi(C) = \chi(A), \quad \chi(D) = \chi(B), \quad D \in \delta_G(C)$$

teljesülnek.

Észrevehetjük, hogy a gráfok homomorfizmusaira vonatkozó kutatásokban többnyire egy „még lazább" fogalmat használnak, amennyiben a fenti (φ), (ψ) kikötések közül csak (φ)-t teszik fel.

Irodalom

[1] Ádám, A., Research problem 2–10 (Isomorphism problem for a special class of graphs), *J. Combinat. Theory,* **2** (1967), 393.

[2] Ádám, A., On some open problems of applied automaton theory and graph theory, *Acta Cybernet.,* **3** (1977), 187–214.

[3] Ádám, A., On certain partitions of finite directed graphs and of finite automata, *Acta Cybernet.,* **6** (1984), 331–346.

[4] Ádám, A., Néhány megoldatlan és megoldott problémáról az irányított gráfok elméletében, I, *Mat. Lapok* (új sorozat – new series) **15**/1 (2009), 14–30.

[5] Ádám, A., Čulík, K. und Pollák, Gy., Ein Satz über teilweise gerichtete Graphen, *Czechoslovak Math. J.,* **13** (1963), 619–621.

[6] Alspach, B., Isomorphism and Cayley graphs on abelian groups, *Graph Symmetry* (ed. by G. Hahn and G. Sabidussi), Kluwer (Dordrecht, 1997), 1–22.

[7] Alspach, B. and Parsons, T. D., Isomorphism of circulant graphs and digraphs, *Discrete Math.,* **25** (1979), 97–108.

[8] Babai, L., Isomorphism problem for a class of point-symmetric structures, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.,* **29** (1977), 329–336.

[9] Elspas, B. and Turner, J., Graphs with circulant adjacency matrices, *J. Combinat. Theory,* **9** (1970), 297–307.

[10] Kloss, B. B., On minimal autonomous partitions of directed graphs and some applications to automata theory, *Acta Cybernet.,* **8** (1988), 325–339.

[11] Li, Cai Heng, On isomorphisms of finite Cayley graphs – a survey, *Discrete Math.,* **256** (2002), 301–334.

[12] Muzychuk, M., Ádám's conjecture is true in the square-free case, *J. Combinat. Theory A,* **77** (1995), 118–134.

[13] Muzychuk, M., On Ádám's conjecture for circulant graphs, *Discrete Math.,* **176** (1997), 285–298.

[14] Muzychuk, M., A solution of the isomorphism problem for circulant graphs, *Proc. London Math. Soc.,* **88** (2004), 1–41.

[15] Pálfy, P. P., Isomorphism problem for relational structures with a cyclic automorphism, *Europ. J. Combin.,* **8** (1987), 37–43.

András Ádám: On some unsolved and solved problems in the theory of directed graphs. II

In this continuation of the survey paper [4], again two subjects are dealt with.

The author has raised the isomorphy problem of circulant graphs in 1967 [1]. A formal expression of type Cay $(n; m_1, m_2, \ldots, m_k)$ can be interpreted as a directed graph, the task consists in characterizing when two such expressions describe the *same* graph (in sense of isomorphy). Two chapters (the second and third ones) of the paper are devoted to this extensively studied question. Three articles of M. Muzychuk ([12]–[14]) represent the culmination of the researches about this graph-theoretical topic. In our Chapter 2, the easier perceivable results are contained. There are indications to works exposing analogous problems (partly non-elaborated ones) concerning other combinatorial structures ([8], [15], [6], [11]).

An (involved) algorithmic construction is explained, based on the deep considerations in [14], in Chapter 3; it yields, starting with an expression as mentioned above, all the expressions describing the same graph.

A different area is treated in Chapter 4 and the Appendices. A kind of partitions, called autonomous ones, is introduced in the vertex set of a graph. This notion is similar to the congruence in algebraic theories. Following [3] and the article [10] of B. Kloss, it is outlined how the autonomous partitions can be presented systematically when finite connected graphs are viewed.

Among the four Appendices, the second and the third ones are noteworthy. The autonomous partitions are here studied, particularly, under the circumstances that there is a sink and any other out-degree is one; moreover, it is shown that an observation of the author on non-connected graphs (Proposition 8 in [3], formulated as a criterion) is valid only unidirectionally.

Ádám András
MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet
1053 Budapest, Reáltanoda u. 13–15.
tappancs@renyi.hu

A D'ALEMBERT – POISSON-FÜGGVÉNYEGYENLET PARAMÉTERES ÁLTALÁNOSÍTÁSÁNAK FOLYTONOS MEGOLDÁSAI

GECSE FRIGYES

Az immár klasszikussá vált D'Alembert – Poisson-függvényegyenlet

$$C(x+y)+C(x-y)=\frac{2C(x)C(y)}{1-\kappa^2\big(1-C^2(x)\big)\big(1-C^2(y)\big)},\quad \kappa\in[0,+\infty[$$

általánosításának $\mathbb{R}$-en definiált valós folytonos megoldásait adjuk meg a cos, ch, valamint a Jacobi-féle cn és dn elliptikus függvények által. Rámutatunk arra is, hogy a D'Alembert – Poisson-függvényegyenlet alkalmas a cos és ch – ezáltal az összes elemi függvény – új típusú definíciójára, valamint elemzésük levezetésére elemi módszerekkel.

Bevezetés

A klasszikus trigonometrikus függvények többféleképpen általánosíthatók. A bevezetési módszerek is különbözők lehetnek: geometriai úton, integrálokkal, hatványsorokkal, differenciálegyenletekkel vagy – mint az alapvető elemi függvények – megfelelő függvényegyenletekkel. Az immár klasszikussá vált, a cos és ch függvényeket meghatározó

$$C(x+y)+C(x-y)=2C(x)C(y) \tag{1}$$

D'Alembert – Poisson-függvényegyenlet megoldásaival és általánosításaival sokan foglalkoztak. A folytonos valós megoldásokat Cauchy adta meg az [1] könyvében (l. német nyelvű kiadását is [2]). Nem elemezzük e témával kapcsolatos terjedelmes irodalmat, csak néhány munkára hivatkozunk: [3]–[6].

Ismertetjük röviden az általánosított szinusz és koszinusz definíciójának módszereit. A klasszikus szögfüggvények az $x^2+y^2=1$ egyenletű körvonal koordinátáival definiálhatók. A paraméter (vagy független változó) szerepét a megfelelő ívhossz vagy körcikk félterülete játssza. Hasonlóképpen definiálhatók a hiperbolikusz függvények is az $x^2-y^2=1$ egyenletű hiperbola pontjainak koordinátáival. Itt paraméternek olyan alakzat félterületét választjuk, amely az abszcisszatengellyel, a hiperbola pontjára és az origóra illeszkedő egyenessel és a hiperbolával határolt. Az említett körvonal és hiperbola egyesítése az $x^4 - y^4 - 2x^2 + 1 = 0$ egyenlettel adható meg. E negyedrendű görbén definiálhatók a cos, sin, ch és sh függvények. A geometriai módszert az (1) egyenlet helyettesítheti.

Természetesnek tűnik, hogy más görbe és független változó alkalmazásával újabb függvények kaphatók. És valóban, a $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ és $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ fókuszú lemniszkáta segítségével, amelynek egyenlete $\left(x^2 + y^2\right)^2 - 2xy = 0$, olyan sl és cl függvények kaphatók [7], amelyek tulajdonságai több szempontból hasonlóak a sin és cos függvények tulajdonságaihoz.

Az ellipszishez köthetők az ún. Jacobi-féle elliptikus függvények, de ezek bevezetésére geometriai módszer helyett integrált alkalmaznak [7, 8].

Legyenek μ és ν jól megválasztott paraméterek, amit később pontosítunk, és nézzük az

$$y \mapsto \int_0^y \frac{dz}{\sqrt{1 + \mu z^2 + \nu z^4}} =: t \tag{2}$$

hozzárendeléssel definiált függvényt (az értelmezési tartományát az alábbiakban adjuk meg). Ennek inverzét nevezik *általánosított szinusznak* [7].

Tekintsünk néhány speciális esetet:

1. Ha $\mu = -1$, $\nu = 0$, akkor a (2) hozzárendelés az arcsin függvényt definiálja; $y \in [-1, 1]$.
2. Ha $\mu = 1$, $\nu = 0$, akkor (2) által az arsh függvényt kapjuk, $y \in \mathbb{R}$.
3. Ha $\mu = 0$, $\nu = -1$, akkor a (2) hozzárendelés az sl függvény $\left[\frac{-\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right]$ intervallumra történő leszűkítésének inverzét adja, ahol 2λ a lemniszkáta teljes ívhossza; $y \in [-1, 1]$.
4. Ha $\mu = -(1 + \kappa^2)$, $\nu = \kappa^2$, ahol $0 < \kappa < 1$, $y \in [-1, 1]$, akkor $1 + \mu z^2 + \nu z^4 = (1 - z^2)(1 - \kappa^2 z^2)$, és (2) inverze azonos a Jacobi-féle sn függvény leszűkítésével a $[-K, K]$ intervallumra, ahol

$$K = K(\kappa) = \int_0^1 \frac{dz}{(1 - z^2)(1 - \kappa^2 z^2)} \tag{3}$$

az ún. *Legrendre-féle normális alakú első fajú teljes elliptikus integrál.* Az sn függvényt az *amplitudó szinuszának* nevezik; jelölése: $t \mapsto \operatorname{sn}(t, \kappa)$, $t \in \mathbb{R}$, vagy röviden: sn.

A sin, sh, sl és sn függvényekkel definiálhatók a megfelelő koszinuszfüggvények: cos, ch, cl, cn, dn [7, 8]. Cikkünk fő célja annak igazolása, hogy ez utóbbi függvények meghatározzák az (1) egyenlet egy κ paramétertől függő

$$C(x + y) + C(x - y) = \frac{2C(x)C(y)}{1 - \kappa^2\left(1 - C^2(x)\right)\left(1 - C^2(y)\right)}, \quad \kappa \in [0, +\infty[\tag{4}$$

általánosításának folytonos megoldásait. Megadjuk a (4) egyenlet minden megoldását a folytonos valós-valós függvények osztályában. A (4) egyenlettel a szakirodalomban nem találkoztunk. A cikk második részében a klasszikus és hiperbolikus trigonometria egy új előadásmódszerét mutatjuk be.

(4) megoldásai ismert függvényekkel

Vezessük be a következő jelölést:

$$D_\kappa(u,v) = \frac{2uv}{1-\kappa^2(1-u^2)(1-v^2)}, \qquad \kappa \in [0,+\infty[\,. \tag{5}$$

Ezáltal (4) jobb oldala átírható $D_\kappa\big(C(x),C(y)\big)$ alakba. Nézzük az alábbi eseteket.

1. Ha $\kappa = 0$, akkor (4)-ből az (1) egyenletet kapjuk. Ezt két különböző kezdőfeltétel mellett fogjuk vizsgálni.
2. Ha $\kappa = 1$, akkor (4) a

$$C(x+y) + C(x-y) = \frac{2C(x)C(y)}{C^2(x)+C^2(y)-C^2(x)C^2(y)} \tag{6}$$

alakra hozható.

3. A $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$ esetben (4)-ből a

$$C(x+y) + C(x-y) = \frac{4C(x)C(y)}{1+C^2(x)+C^2(y)-C^2(x)C^2(y)} \tag{7}$$

egyenletet kapjuk.

4. Meg kell különböztetni a $\kappa > 1$ esetet a $0 < \kappa < 1$ esettől.

A továbbiakban C-vel vagy C_κ-val fogjuk jelölni a (4) egyenlet $\mathbb{R}$-en definiált tetszőleges folytonos valós megoldását.

Először a konstans megoldásokat keressük meg. Nyilvánvaló, hogy (4) konstans megoldásai az alábbi algebrai egyenletek megoldásaival adottak:

$$2z = 2z^2, \quad \text{ha } \kappa = 0, \tag{8}$$

$$2z = \frac{2z^2}{2z^2 - z^4}, \quad \text{ha } \kappa = 1, \tag{9}$$

$$2z = \frac{4z^2}{1+2z^2-z^4}, \quad \text{ha } \kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{10}$$

$$2z = \frac{2z^2}{1-\kappa^2\big(1-z^2\big)^2}, \quad \text{ha } \kappa > 0,\ \kappa \neq \frac{1}{\sqrt{2}},\ \kappa \neq 1. \tag{11}$$

Nyilván a $z = 1$ szám a (8–11) egyenlet mindegyikének megoldása.

A $z = 0$ szám a (9) egyenlet kivételével minden fenti egyenlet gyöke.

A (8) egyenlet megoldásai: 0; 1; a (9) egyenletnek pedig három gyöke van: 1; $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$.

A (10) egyenletnek három megoldása van: 0; 1 és egy a $]-1{,}9; -1{,}8[$ intervallumba tartozó szám.

Nézzük a (11) egyenlet 0-tól és 1-től különböző gyökeit. Ezek megegyeznek a $P(z) := \kappa^2(z^3+z^2-z-1)+1$ polinom zérushelyeivel. A P-nek két kritikus helye van: $z_0=-1$ és $z_1=\frac{1}{3}$. Az első helyen 1 értékű maximum, a másodikon pedig minimumérték van. Ez alapján könnyen megállapítható, hogy P zérushelyei – és egyben (11) megoldásai is – a következő számok:

$z_1 = \frac{1}{3}$, $z_2 \in \,]-1{,}7;-1{,}6[$, ha $\kappa^2 = \frac{27}{32}$ (ekkor $P\left(\frac{1}{3}\right)=0$);

$z_3 \in \,]-\infty;-1{,}6[$, ha $\kappa^2 < \frac{27}{32}$ (ekkor $P\left(\frac{1}{3}\right)>0$);

$z_4 \in \,]-1{,}7;-1{,}65[$, $z_5 \in \left]0,\frac{1}{3}\right[$, $z_6 \in \left]\frac{1}{3};0,62\right[$, ha $\frac{27}{32} < \kappa^2 < 1$ (ekkor $P\left(\frac{1}{3}\right)<0$);

$z_7 \in \,]-1{,}65;-1[$, $z_8 \in \,]-1;0[$, $z_9 \in \,]0{,}6;1[$, ha $\kappa > 1$.

A továbbiakban a konstans megoldásokkal nem foglalkozunk.

1. tétel. *A (4) függvényegyenlet folytonos megoldásai közé tartoznak az alábbi függvények ($x,\alpha \in \mathbb{R}$):*

$$C_k(x) = \cos\alpha x,\quad C_k(x) = \operatorname{ch}\alpha x, \quad \text{ha} \quad \kappa = 0; \tag{12}$$

$$C_k(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha x} = \operatorname{cn}(\alpha x,1) = \operatorname{dn}(\alpha x,1), \quad \text{ha} \quad \kappa=1; \tag{13}$$

$$C_k(x) = \operatorname{cl}(\alpha x), \quad \text{ha} \quad \kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}; \tag{14}$$

$$C_k(x) = \operatorname{cn}(\alpha x,\kappa), \quad \text{ha} \quad 0<\kappa<1; \tag{15}$$

$$C_k(x) = \operatorname{dn}\left(\alpha x,\frac{1}{\kappa}\right), \quad \text{ha} \quad \kappa>1. \tag{16}$$

Bizonyítás. A (12) megoldásokat már Cauchy megállapította [1]. Ismertek a $\operatorname{cn}(x,1) = \operatorname{dn}(x,1) = (\operatorname{ch} x)^{-1}$ egyenlőségek [7]. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a

$$C_k(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha x} = \frac{2}{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

függvény kielégíti (4)-et $\kappa=1$ esetén.

Igazoljuk, hogy (15) és (16) a (4) egyenlet megoldásai. Alkalmazzuk az alábbi ismert képleteket, ahol $0<\kappa<1$ [7, 8]:

$$\operatorname{cn}(x+y) = (\operatorname{cn} x \operatorname{cn} y - \operatorname{sn} x \operatorname{sn} y \operatorname{dn} x \operatorname{dn} y)\left(1-\kappa^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y\right)^{-1};$$

$$\operatorname{dn}(x+y) = \left(\operatorname{dn} x \operatorname{dn} y - \kappa^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} x \operatorname{cn} y\right)\left(1-\kappa^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y\right)^{-1};$$

$$\operatorname{sn}^2(x,\kappa) + \operatorname{cn}^2(x,\kappa) = 1; \quad \kappa^2\operatorname{sn}^2(x,\kappa) + \operatorname{dn}^2(x,\kappa) = 1.$$

Vegyük figyelembe, hogy cn, dn és cl páros függvények, sn és sl pedig páratlanok. Így kapjuk, hogy

$$\operatorname{cn}(x+y,\kappa)+\operatorname{cn}(x-y,\kappa)=2\operatorname{cn}(x,\kappa)\operatorname{cn}(y,\kappa)\big(1-\kappa^2\operatorname{sn}^2(x,\kappa)\operatorname{sn}^2(y,\kappa)\big)^{-1}=$$

$$=2\operatorname{cn}(x,\kappa)\operatorname{cn}(y,\kappa)\big(1-\kappa^2(1-\operatorname{cn}^2(x,\kappa))\,(1-\operatorname{cn}^2(y,\kappa))\big)^{-1}\quad(\kappa<1);$$

$$\operatorname{dn}\left(x+y,\frac{1}{\kappa}\right)+\operatorname{dn}\left(x-y,\frac{1}{\kappa}\right)=$$

$$=2\operatorname{dn}\left(x,\frac{1}{\kappa}\right)\operatorname{dn}\left(y,\frac{1}{\kappa}\right)\left(1-\kappa^{-2}\operatorname{sn}^2\left(x,\frac{1}{\kappa}\right)\operatorname{sn}^2\left(y,\frac{1}{\kappa}\right)\right)^{-1}=$$

$$=2\operatorname{dn}\left(x,\frac{1}{\kappa}\right)\operatorname{dn}\left(y,\frac{1}{\kappa}\right)\left(1-\kappa^2\left(1-\operatorname{dn}^2\left(x,\frac{1}{\kappa}\right)\right)\left(1-\operatorname{dn}^2\left(y,\frac{1}{\kappa}\right)\right)\right)^{-1}$$

$(\kappa>1)$.

Ennélfogva állításunk igaz. Hasonló módszer alkalmazható a (14) megoldás ellenőrzésére is. De erre nincs szükség, mert $\operatorname{cl} x=\operatorname{cn}\big(\sqrt{2}x,\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ [7]. ∎

Az alábbiakban be fogjuk bizonyítani, hogy a konstans és az 1. tételben közölt megoldások teljesen kimerítik a (4) egyenlet folytonos megoldásait.

A folytonos megoldások néhány tulajdonsága

1. lemma. *A κ bármely nem negatív értékénél*

(17) $$C_\kappa(0)=1;$$

(18) $$C_\kappa(-x)=C_\kappa(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

A $\kappa=0$ esetben C_0 folytonosságát nem szükséges feltételezni.

Bizonyítás. Legyen C a (4) egyenlet nem konstans, folytonos megoldása és $C(0)=a$. Tegyük fel, hogy $a=0$. Nyilván $\kappa=1$ esetén ez nem lehetséges. Ha pedig $\kappa\neq1$, akkor (4) szerint $C(x)=0$ minden x-re, amit kizártunk. Tehát $a\neq0$.

Evidens, hogy $a=1$, ha $\kappa=0$. Legyen $\kappa>0$. Ha $a=-1$, akkor (4)-ből azt kapjuk, hogy $C(x)=-C(x)$ minden x-re, amit kizártunk. Ha $a^2\neq1$ és $C(x)\neq0$, akkor (4) szerint

$$a=1-\kappa^2(1-a^2)\big(1-C^2(x)\big),\quad C^2(x)=1-(1-a)\big(\kappa^2(1-a^2)\big)^{-1}.$$

Ebből viszont az következik, hogy C legfeljebb három értéket vehet fel, azaz konstans függvény. Ezért egy lehetőség marad: $a=1$.

A (18) egyenlőséget $C(a)=1$ miatt (4)-ből kapjuk $x=0$ helyettesítéssel. ∎

Alkalmazzuk a továbbiakban a

(19) $$g_\kappa(u) := 2u\big(1-\kappa^2(1-u)^2\big)^{-1} - 1, \quad \text{ha} \quad \kappa \in [0,+\infty[,$$

valamint $\kappa > 1$ esetén a $\kappa' := \sqrt{1-\kappa^{-2}}$ jelölést. Az $y = x$ helyettesítéssel (4)-ből kapjuk, hogy

(20) $$C_\kappa(2x) = g_\kappa\big(C_\kappa^2(x)\big), \; x \in \mathbb{R}, \; \kappa \in [0,+\infty[.$$

Vezessük be a g_κ függvényt a (19) hozzárendelési szabállyal és a következő értelmezési tartománnyal:

$$D_{g_\kappa} = \begin{cases} \left\{u \in \mathbb{R} \,\middle|\, u \geq \dfrac{1}{2}\right\}, & \text{ha } \kappa = 0, \\ \{u \in \mathbb{R} \mid 0 < u \leq 1\}, & \text{ha } \kappa = 1, \\ \big\{u \in \mathbb{R} \mid \big(\kappa^2 - 1 + \sqrt{1-\kappa^2}\big)\kappa^{-2} \leq u \leq 1\big\}, & \text{ha } 0 < \kappa < 1, \\ \{u \in \mathbb{R} \mid \kappa' \leq u \leq 1\}, & \text{ha } \kappa > 1. \end{cases}$$

2. lemma. *A g_κ függvény szigorúan monoton növekvő és értékkészlete:*

$$R_{g_\kappa} = \begin{cases} \{v \in \mathbb{R} \mid v \geq 0\}, & \textit{ha } \kappa = 0, \\ \{v \in \mathbb{R} \mid 0 < v \leq 1\}, & \textit{ha } \kappa = 1, \\ \{v \in \mathbb{R} \mid 0 \leq v \leq 1\}, & \textit{ha } 0 < \kappa < 1, \\ \{v \in \mathbb{R} \mid \kappa' \leq v \leq 1\}, & \textit{ha } \kappa > 1. \end{cases}$$

Bizonyítás. A κ minden értékénél a g_κ függvény definíciója korrekt és

$$g_\kappa'(u) = \big(2\kappa^2u^2 - 2\kappa^2 + 2\big)\big(1 - \kappa^2(1-u)^2\big)^{-2}, \quad u \in D_{g_\kappa}.$$

A g_κ' deriváltfüggvény értékei – egy kivételével – pozitívak, mert $\kappa^2u^2 - \kappa^2 + 1 > 0$, ha $u \in D_{g_\kappa}$ és $\kappa \leq 1$; $\kappa^2u^2 - \kappa^2 + 1 > \kappa^2(\kappa')^2 - \kappa^2 + 1 = 0$, ha $u \in D_{g_\kappa}$, $u > \kappa'$ és $\kappa > 1$. Tehát g_κ szigorúan monoton növekvő függvény. Ez alapján kapható az értékkészlete is, mivel

$$g_\kappa\left(\frac{\kappa^2 - 1 + \sqrt{1-\kappa^2}}{\kappa^2}\right) = \frac{2\big(\kappa^2 - 1 + \sqrt{1-\kappa^2}\big)}{\kappa^2\big[1 - \kappa^{-2}\big(1 - \sqrt{1-\kappa^2}\big)^2\big]} - 1 = 0,$$

$g_\kappa(1) = 1,$ ha $0 < \kappa < 1;$

$$g_\kappa(\kappa') = \frac{2\kappa'}{1 - \kappa^2(1-\kappa')^2} - 1 = \frac{2\kappa'}{1 - \big(\kappa - \sqrt{\kappa^2-1}\big)^2} - 1 =$$

$$= \frac{2\sqrt{\kappa^2-1}}{\kappa\big(2 - 2\kappa^2 + 2\kappa\sqrt{\kappa^2-1}\big)} - 1 = \frac{1}{\kappa\big(\kappa - \sqrt{\kappa^2-1}\big)} - 1 = \kappa',$$

$g_\kappa(1) = 1,$ ha $\kappa > 1.$

Ha κ értéke 0 vagy 1, a bizonyítás hasonló. ■

3. lemma. *A (4) egyenlet nem konstans, folytonos megoldásaira az alábbi egyenlőtlenségek teljesülnek:*

1. $|C_0(x)| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$ *vagy* $C_0(x) > 1$ *minden* $x \neq 0$ *esetén;*
2. $|C_\kappa(x)| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, *ha* $0 < \kappa < 1$;
3. $0 < C_1(x) < 1$, *ha* $x \neq 0$;
4. $\kappa' \leq C_\kappa(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, *ha* $\kappa > 1$.

Bizonyítás. 1. Nyilván $C_0(x) \geq -1$, hiszen (20) szerint $C_0(2x) = 2C_0^2(x) - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy van olyan x_0, amelyre $C_0(x_0) > 1$. Az 1. lemma alapján feltételezhető, hogy $x_0 > 0$. Igazoljuk teljes indukcióval, hogy

$$C_0(2^{-n}x_0) > 1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

A feltételezés szerint az egyenlőtlenség igaz $n = 0$-ra. Tegyük fel, hogy az igaz rögzített $n \geq 0$ esetén. Ekkor (1) és (21) miatt $1 < C_0(2^{-n}x_0) = 2C_0^2(2^{-n-1}x_0) - 1$, és $C_0(2^{-n-1}) \geq -1$ következtében $C_0(2^{-n-1}x_0) > 1$.

Bizonyítsuk be szintén indukcióval, hogy minden $n > 0$ esetén

$$C_0\big((k+1)2^{-n}x_0\big) > C_0(k2^{-n}x_0) > 1, \quad k \in \mathbb{N}^+. \tag{22}$$

Az egyenlőtlenségek teljesülnek $k = 1$ esetén, mert (1) és (21) miatt

$$2 < 2C_0(2^{-n}x_0) < 2C_0^2(2^{-n}x_0) = 1 + C_0(2 \cdot 2^{-n}x_0) < 2C_0(2 \cdot 2^{-n}x_0).$$

Tegyük fel, hogy (22) igaz rögzített n és k-ra. Ekkor hasonlóképpen kapjuk, hogy

$$C_0\big((k+2)2^{-n}x_0\big) = 2C_0(2^{-n}x_0)C_0\big((k+1)2^{-n}x_0\big) - C_0(k \cdot 2^{-n}x_0) >$$
$$> C_0\big((k+1)2^{-n}x_0\big) + \Big[C_0\big((k+1)2^{-n}x_0\big) - C_0\big(k \cdot 2^{-n}x_0\big)\Big] >$$
$$> C_0\big((k+1)2^{-n}x_0\big) > 1.$$

A bizonyítottak szerint $C_0(x) > 1$ a $\{k2^{-n}x_0 \mid k, n \in \mathbb{N}^+\}$ halmazon. Mivel e halmaz sűrű $\mathbb{R}^+$-ban és C_0 folytonos, páros függvény, ezért $C_0(x) \geq 1$ minden valós x-re. Ha lenne olyan $x_1 \neq 0$, amelyre $C_0(x_1) = 1$ teljesülne, akkor $C_0(x) \geq 1$ alapján a fentiekhez hasonlóan bizonyítható lenne, hogy C_0 konstans függvény. Ezzel a $C_0(x) > 1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ állítást bebizonyítottuk. Ebből a lemma 1. állítása is következik.

2. Indirekt módszert alkalmazva tegyük fel, hogy vannak olyan a és $d \in \left]0, \frac{1}{\kappa}\right[$ számok, amelyekre a $C^2(a) \geq 1 + d$ egyenlőtlenség teljesül (a κ indexet elhagyjuk). Ha $C^2(a) \geq 1 + \frac{1}{\kappa}$, akkor (20) alapján azonnal ellentmondásra jutunk, mert ekkor található olyan b szám, amelyre $C^2(b) = 1 + \frac{1}{\kappa}$, viszont a $C(2b) = g_\kappa\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)$ nem létezik.

Tegyük fel, hogy $1+d \le C^2(a) < 1+\frac{1}{\kappa}$. Becsüljük a $C(2a)$ értéket alulról, figyelembe véve, hogy a g_κ függvény értelmezhető és növekvő az $\left]1, 1+\frac{1}{\kappa}\right[$ intervallumon is:

$$C(2a) \ge g_\kappa(1+d) = 1+2d\frac{1+\kappa^2 d}{1-\kappa^2 d^2} > 1+2d, \quad C^2(2a) > 1+4d.$$

Ha $C^2(2a) \ge 1+\frac{1}{\kappa}$, akkor a $C(0)=1$ egyenlőség és C folytonossága következtében létezik a keresett b szám. Ellenkező esetben a fenti módszerrel kapjuk, hogy $C^2(4a) > 1+4^2 d$. Nyilván bizonyos k lépés után a $C^2(2^k a) \ge 1+\frac{1}{\kappa}$ egyenlőtlenség kapható, ezért a keresett b szám létezik.

3. Most $\kappa = 1$. Mivel bármilyen x-re $C(x) \ne 0$, $C(0)=1$ és C folytonos függvény, ezért $C(x) > 0$ minden x-re. Tegyük fel, hogy van olyan $a > 0$, amelyre $C(a) = 1$. Mivel

$$(23) \qquad g_1(x) = \frac{x}{2-x}, \quad C(2x) = \frac{C^2(x)}{2-C^2(x)}, \quad C\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{2C(x)}{C(x)+1}},$$

(23) alapján indukcióval könnyen bizonyítható, hogy $C(a2^{-n}) = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Viszont (6) szerint

$$C\big((k+1)a2^{-n}\big) = 2C(a2^{-n})C(ka2^{-n})\big[C^2(ka2^{-n}) +$$
$$+ C^2(a2^{-n})\big(1 - C^2(ka2^{-n})\big)\big]^{-1} - C\big((k-1)a2^{-n}\big) =$$
$$= 2C(ka2^{-n}) - C\big((k-1)a2^{-n}\big),$$

ezért teljes indukcióval igazolható, hogy $C(ka2^{-n}) = 1$; $k, n \in \mathbb{N}$. De a $\{ka2^{-n} \mid k, n \in \mathbb{N}\}$ halmaz sűrű $[0, +\infty[$-ben, ezért a C folytonos függvény konstans. Ezt kizártuk.

Legyen b olyan szám, hogy $C^2(b) = 1+d$, $d > 0$. Ha $d \ge 1$, akkor (23) szerint $C(2b)$ negatív vagy nem létezik. Ha pedig $d < 1$, akkor $C(2b) = \frac{1+d}{1-d} > 1+2d$, $C^2(2b) > 1+4d$, és a 2. pontban alkalmazott módszerrel ismét ellentmondáshoz jutunk. Tehát $C(x) < 1$ minden $x \ne 0$-ra.

4. Ha $\kappa > 1$, akkor a (19) és (20) egyenlőségekből következik, hogy $C(x) > \sqrt{1-\frac{1}{\kappa}}$, mert $C(a) = \sqrt{1-\frac{1}{\kappa}}$ esetén $C(2a)$ nem létezik.

Tegyük fel, hogy van olyan x_0, amelyre $C^2(x_0) = 1+d$, $d > 0$. Ha $d\kappa \ge 1$, akkor (19) és (20) szerint $C(2x_0)$ negatív vagy nem létezik. Ha pedig $d\kappa < 1$, akkor (20) alapján

$$C(2x_0) = \frac{2(1+d)}{1-\kappa^2 d^2} - 1 = 1+2d\frac{1+\kappa^2 d}{1-\kappa^2 d^2} > 1+2d,$$

és a korábban alkalmazott módszerrel ismét ellentmondáshoz jutunk.

De mivel $C^2(x) > 1-\frac{1}{k}$ minden x-re, és $g_\kappa(u) \ge g_\kappa(\kappa') = \kappa'$, ha $1-\frac{1}{k} < u \le 1$, ezért (20) alapján $C(2x) \ge \kappa'$, $x \in \mathbb{R}$. ■

4. lemma.

1. *Legyen* $0 \le \kappa < 1$, *és teljesüljön a* $|C_0(x)| \le 1$ *feltétel. Ekkor létezik olyan pozitív* γ *szám, hogy* $C_\kappa(\gamma) = 0$ *és* $C_\kappa(x) > 0$, *ha* $0 < x < \gamma$.
2. *Létezik olyan* $\gamma > 0$, *hogy* $C_1(\gamma) = \frac{1}{H} := \frac{2}{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}}$, *ahol* e *az Euler-féle szám.*
3. *Ha* $\kappa > 1$, *akkor létezik olyan pozitív* γ, *amelyre a*

$$C_\kappa{}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \kappa', \quad C_\kappa(\gamma) = \kappa', \quad C_\kappa(2\gamma) = 1 \tag{24}$$

egyenlőségek teljesülnek, és $C_\kappa{}^2(x) > \kappa'$, *ha* $0 < x < \frac{\gamma}{2}$. *A* C_κ *függvény értékkészlete:* $R_{C_\kappa} = [\kappa', 1]$.

Bizonyítás. 1. Tegyük fel, hogy a C_κ függvény eleget tesz a lemma feltételének, de nem rendelkezik zérushellyel. Vezessük be a q számot a következőképpen:

$$q = \frac{1}{2}, \text{ ha } \kappa = 0; \quad q = \left(\sqrt{1-\kappa^2} - 1 + \kappa^2\right)\kappa^{-2}, \text{ ha } 0 < \kappa < 1.$$

Állítjuk, hogy $C_\kappa{}^2(x) > q > 0$ minden x esetén. Valóban, ha lenne olyan x, amelyre $C_\kappa{}^2(x) \le q$ teljesülne, akkor (19) és (20) szerint érvényesek lennének a $g_\kappa\left(C_\kappa{}^2(x)\right) \le 0$ és $C_\kappa(2x) \le 0$ egyenlőtlenségek, és C_κ-nak lenne zérushelye.

Legyen $a := \inf C_\kappa$. Ekkor $q \le a^2 < 1$. A (20) egyenlőség következtében minden x-re igaz, hogy

$$1 + a \le 1 + C_\kappa(2x) \le 2C_\kappa{}^2(x)\left[1 - \kappa^2\left(1-a^2\right)^2\right]^{-1}, \tag{25}$$

$$2C_\kappa{}^2(x) \ge (1+a)\left[1 - \kappa^2\left(1-a^2\right)^2\right].$$

Ha belátjuk, hogy (25) jobb oldalán $2a^2$-nél nagyobb értékű kifejezés áll, akkor az $\inf C_\kappa = a$ egyenlőséggel ellentmondásba ütközünk. Ha $\kappa = 0$, akkor $1 + a > 2a^2$, és az ellentmondás nyilvánvaló. Legyen $0 < \kappa < 1$, és végezzük el az alábbi átalakítást és becslést:

$$(1+a)\left[1 - \kappa^2\left(1-a^2\right)^2\right] - 2a^2 = \left(1-\kappa^2\right)\left(1+a-2a^2\right) + \kappa^2\left(2a^3 - a^4 - a^5\right) > 0.$$

Ennélfogva ellentmondásra jutottunk, tehát C_κ-nak van zérushelye. A C_κ folytonossága és a $C_\kappa(0) = 1$ egyenlőség következtében a C_κ függvénynek létezik legkisebb pozitív zérushelye. Ezt γ-val jelöljük.

2. Legyen $\kappa = 1$. A 3. lemma szerint van olyan x_0, hogy $a := C(x_0) < 1$. Igazoljuk teljes indukcióval, hogy

$$C(2^k x_0) \le a^{2^k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

Ha $k = 0$, akkor egyenlőség áll fenn. Az egyenlőtlenség teljesüléséből $k = n$ esetén g_1 növekedése miatt azt kapjuk, hogy

$$C(2^{n+1}x_0) = g_1\left(C^2(2^n x_0)\right) \le g_1\left(a^{2\cdot 2^n}\right) = a^{2^{n+1}}\left[2 - a^{2^{n+1}}\right]^{-1} < a^{2^{n+1}}.$$

Mivel $a^{2^{n+1}}$ bármilyen kicsi lehet, ezért a folytonosság következtében van olyan γ, amelyre $C(\gamma) = H^{-1}$.

3. A 3. lemma alapján $0 < p := \inf C < 1$. Ha $p < \sqrt{\kappa'}$, akkor a folytonosság és a $C(1) = 0$ egyenlőség következtében a $C^2(x) = \kappa'$ egyenletnek van megoldása.

Tegyük fel, hogy $p \geq \sqrt{\kappa'}$ és $q := p^2$. Igazoljuk, hogy

$$g_\kappa(q) = 2q\big[1 - \kappa^2(1-q)^2\big]^{-1} - 1 \leq q. \tag{27}$$

Vegyük figyelembe, hogy a szögletes zárójelben lévő kifejezés pozitív, hiszen

$$1 - \kappa^2(1-q)^2 \geq 1 - \big(\kappa(1-\kappa')\big)^2 = 1 - \big(\kappa - \sqrt{\kappa^2 - 1}\big)^2 =$$
$$= 2\Big(\kappa\sqrt{\kappa^2-1} - \big(\kappa^2 - 1\big)\Big) > 0.$$

Ennélfogva a (27) egyenlőtlenség ekvivalens az alábbiakkal:

$$2q - (q+1)\big(1 - \kappa^2(1-q)^2\big) \leq 0,$$
$$(q-1)\Big(1 + \kappa^2\big(q^2 - 1\big)\Big) \leq 0,$$
$$1 + \kappa^2\big(q^2 - 1\big) \geq 0.$$

Az utolsó egyenlőtlenség igaz, hiszen $q^2 - 1 \geq (\kappa')^2 - 1 = -\kappa^{-2}$. Ezzel (27)-et igazoltuk.

Legyen (x_n) olyan sorozat, hogy $\lim_{n\to\infty} C^2(x_n) = q$. Ekkor C és g_κ folytonossága, valamint (27) következtében

$$p \leq \lim_{n\to\infty} C(2x_n) = \lim_{n\to\infty} g_\kappa\big(C^2(x_n)\big) = g_\kappa(q) \leq q = p^2.$$

Ez ellentmond annak, hogy $0 < p < 1$. Tehát a $p \geq \sqrt{\kappa'}$ feltételezés hamis, és a $C^2(x) = \kappa'$ egyenletnek van megoldása. Ekkor van legkisebb pozitív megoldás is, amit $\frac{\gamma}{2}$-vel jelölünk.

Továbbá (20) és a 2. lemma alapján

$$C(\gamma) = g_\kappa(\kappa') = \kappa',$$

$$C(2\gamma) = g_\kappa\big((\kappa')^2\big) = \frac{2(\kappa')^2}{1 - \kappa^2\big(1 - (\kappa')^2\big)^2} - 1 = \frac{2(\kappa')^2}{1 - \kappa^{-2}} - 1 = 1.$$

A lemma utolsó állítása ezek után a 3. lemmából következik. ∎

Megjegyzés. A 2. lemma és (20) következtében $\frac{\gamma}{2}$ a $C_\kappa^2(x) = \kappa'$ egyenlet legkisebb pozitív megoldása akkor és csakis akkor, amikor γ a $C_\kappa(x) = \kappa'$ egyenlet legkisebb pozitív megoldása ($\kappa > 1$).

A megoldások osztályozása

Legyen γ tetszőleges pozitív szám. Olyan megszámlálható, $\mathbb{R}$-ben sűrű halmazra van szükségünk, amelyről (4) megoldása egyértelműen kiterjeszthető $\mathbb{R}$-re. Ezért legyen:

$$\omega_n = \omega_n(\gamma) = \gamma 2^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \Omega_\gamma = \{k\omega_n \mid n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}; \quad \Omega_\gamma^\circ = \Omega_\gamma \cap]0, \gamma[\,.$$

5. lemma. *Az Ω_γ halmaz zárt az összeadás, kivonás, egész számmal történő szorzás és 2-vel való osztás műveletekre. Az Ω_γ halmaz sűrű $\mathbb{R}$-ben.*

Bizonyítás. Csak az utolsó állítást igazoljuk, a többi egszerűen ellenőrizhető. Legyenek a, b olyan valós számok, hogy $a < b$. Válasszunk olyan n természetes számot, hogy az $\omega_n < b - a$ egyenlőtleség teljesüljön. Ha $k = \left[\frac{a}{\omega_n}\right] + 1$, akkor $k - 1 \leq \frac{a}{\omega_n} < k$, $a < k\omega_n \leq a + \omega_n < a + b - a = b$. ■

6. lemma. *Minden x-re $\mathbb{R}$-ből és n-re $\mathbb{N}$-ből igaz, hogy*

$$u_n(x) := u_n(x, \gamma) := \left[\frac{x}{\omega_n}\right] \omega_n \in \Omega_\gamma, \quad v_n(x) := v_n(x, \gamma) := u_n(x) + \omega_n \in \Omega_\gamma,$$

$$u_n(x) \leq x < v_n(x), \quad \lim_{n \to \infty} u_n(x) = \lim_{n \to \infty} v_n(x) = x.$$

Az $\big(u_n(x)\big)$ sorozat monoton növekvő, a $\big(v_n(x)\big)$ pedig monoton fogyó.

A **bizonyítás** egyszerű, megtalálható [9]-ben vagy [10]-ben.

Vezessük be az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ típusú függvények következő osztályait:

$f \in C_{0,\gamma}(\mathbb{R})$ akkor és csakis akkor, ha $f(\gamma) = 0$ és $f(x) > 0$, ha $0 < x < \gamma$;

$f \in C_{0,\gamma,c}(\mathbb{R})$ akkor és csakis akkor, ha $f(\gamma) = 0$, f folytonos és $f(x) > 0$, ha $0 < x < \gamma$;

$f \in C_{\kappa,\gamma}(\mathbb{R})$ akkor és csakis akkor, ha $\kappa > 1$, f folytonos, $f(\gamma) = \kappa'$ és $f(x) > \kappa'$, ha $0 < x < \gamma$;

$f \in C_{H,\gamma}(\mathbb{R})$ akkor és csakis akkor, ha f folytonos és $f(\gamma) = H$;

$f \in C_{H^{-1},\gamma}(\mathbb{R})$ akkor és csakis akkor, ha f folytonos és $f(\gamma) = H^{-1}$.

Ugyanilyen feltételekkel, de folytonosság nélkül definiáljuk az $f : \Omega_\gamma \to \mathbb{R}$ típusú függvények $C_{0,\gamma}(\Omega_\gamma)$, $C_{\kappa,\gamma}(\Omega_\gamma)$, $C_{H,\gamma}(\Omega_\gamma)$, $C_{H^{-1},\gamma}(\Omega_\gamma)$ osztályait.

Legyen h_κ a g_κ inverz függvénye (l. a 2. lemmát) és $t_\kappa := \sqrt{h_\kappa}$. Definiáljunk egy (τ_n') sorozatot és κ-tól függően egy $(\tau_n) = \big(\tau_n(\kappa)\big)$ sorozatot a következőképpen:

$$\tau_0' = H, \quad \tau_{n+1}' = t_0(\tau_n'), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\tau_0 := \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq \kappa < 1; \\ H^{-1}, & \text{ha } \kappa = 1; \\ \kappa', & \text{ha } \kappa > 1; \end{cases}$$

$$\tau_{n+1} = t_\kappa(\tau_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

7. lemma. *A* (τ_n) *és* (τ'_n) *sorozat szigorúan monoton növekvő, illetve csökkenő, és*

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \lim_{n\to\infty} \tau'_n = 1. \tag{28}$$

Bizonyítás. A monotonitás igazolására indukciót alkalmazunk. Lássuk be először, hogy $\tau_1 > \tau_0$, és $\tau'_1 < \tau'_0$.

Ha $\kappa = 0$, akkor $\tau_1 = t_0(0) = \sqrt{(1+0)2^{-1}} > 0 = \tau_0$. Viszont $\tau'_1 = t_0(H) = \sqrt{(1+H)2^{-1}} < H = \tau'_0$, mert $H > 1$.

Ha $0 < \kappa < 1$, akkor $\tau_1 = t_\kappa(0) = \sqrt{h_\kappa(0)} = \sqrt{\left(\kappa^2 - 1 + \sqrt{1-\kappa^2}\right)\kappa^{-2}} > 0 = \tau_0$.

Ha $\kappa = 1$, akkor $\tau_1 = t_1(H^{-1}) = \sqrt{h_1(H^{-1})} = \sqrt{2(H+1)^{-1}} > H^{-1} = \tau_0$.

Ha $\kappa > 1$, akkor $g_\kappa(\kappa') = \kappa'$ miatt $\tau_1 = t_\kappa(\kappa') = \sqrt{h_\kappa(\kappa')} = \sqrt{\kappa'} > \kappa' = \tau_0$.

Tegyük fel most, hogy $\tau_{n+1} > \tau_n$ és $\tau'_{n+1} < \tau'_n$. A 2. lemma alapján a t_κ függvény szigorúan monoton növekvő, ezért

$$\tau_{n+2} = t_\kappa(\tau_{n+1}) > t_\kappa(\tau_n) = \tau_{n+1}, \qquad \tau'_{n+2} = t_0(\tau'_{n+1}) < t_0(\tau'_n) = \tau'_{n+1}.$$

Ezzel a monotonitást igazoltuk. De a tárgyalt sorozatok korlátosak is. Ha $\kappa = 0$, akkor (τ_n) korlátos felülről 1-gyel, (τ'_n) pedig alulról 1-gyel. Ha $\kappa > 0$, akkor a sorozatok korlátossága a t_κ függvény korlátosságából következik. Ennélfogva a (τ_n) és (τ'_n) sorozatoknak van véges a, illetve b határértékük. A t_κ függvény folytonossága következtében

$$a = \lim_{n\to\infty} \tau_{n+1} = t_\kappa\Big(\lim_{n\to\infty} \tau_n\Big) = t_\kappa(a),$$

$$b = \lim_{n\to\infty} \tau'_{n+1} = t_0\Big(\lim_{n\to\infty} \tau'_n\Big) = t_0(b).$$

Innen $a^2 = h_\kappa(a)$, $g_\kappa(a^2) = a$; $b^2 = h_0(b)$, $g_0(b^2) = b$. Vegyük figyelembe, hogy $b \geq 1$; $0 < a \leq 1$, ha $\kappa \leq 1$, és $a \in]\kappa', 1]$, ha $\kappa > 1$. Az könnyen ellenőrizhető, hogy $b = 1$.

Alakítsuk át a $g_\kappa(a^2) = a$ egyenletet a következőképpen:

$$\kappa^2 a^5 + \kappa^2 a^4 - 2\kappa^2 a^3 + 2a^2 - 2\kappa^2 a^2 + \kappa^2 a - a + \kappa^2 - 1 = 0,$$

$$(a-1)\left[\kappa^2 a^4 + 2\kappa^2 a^3 + \left(2 - 2\kappa^2\right)a + 1 - \kappa^2\right] = 0.$$

Látható, hogy létezik a keresett $a = 1$ gyök. Még azt kell igazolni, hogy a

$$\phi(a) := \kappa^2 a^4 + 2\kappa^2 a^3 + 2\left(1 - \kappa^2\right)a + 1 - \kappa^2 = 0$$

egyenletnek nincs gyöke a $]0;1[$ intervallumban $\kappa \leq 1$ esetén, illetve a $\left]\sqrt{\kappa'}, 1\right[$ intervallumban, ha $\kappa > 1$. Az első állítás nyilvánvaló. Legyen $\kappa > 1$ és $a \in \left]\sqrt{\kappa'}; 1\right[$. Ekkor

$$\kappa^2\left(a^4 - 1\right) + 1 > \kappa^2 - 1 - \kappa^2 + 1 = 0, \quad 2a\left(a^2\kappa^2 + 1 - \kappa^2\right) > 0,$$

mert $\kappa > \sqrt{\kappa^2 - 1}$, $\kappa\sqrt{\kappa^2 - 1} > \kappa^2 - 1$, $\kappa^2 a^2 > \kappa\sqrt{\kappa^2 - 1} > \kappa^2 - 1$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\phi(a) > 0$. Ennélfogva $g_\kappa(a^2) = a$ alapján állítható, hogy $a = 1$. ■

8. lemma. *Legyen C az (1) egyenlet tetszőleges megoldása. Ha C a $C_{0,\gamma}(\mathbb{R})$ vagy $C_{0,\gamma}(\Omega_\gamma)$ osztályba tartozik, akkor $x \in \mathbb{R}$, illetve $x \in \Omega_\gamma$ esetén*

$$(29) \quad 2C^2(x) = 1 + C(2x), \quad 2C^2(x-\gamma) = 1 - C(2x), \quad C^2(x) + C^2(x-\gamma) = 1.$$

Ha C az (1) egyenlet olyan folytonos megoldása, amelyre $C(x_0) > 1$ valamely x_0 esetén, akkor $C(x) > 1$ minden $x \neq 0$-ra, és $R_C = [1, +\infty[$.

Bizonyítás. Az egyenlőségek könnyen igazolhatók (1) és az 1. lemma alapján [9]. Tegyük fel, hogy $C(x_0) = 1 + a > 1$. Bizonyítsuk be indukcióval, hogy

$$(30) \qquad C(2^k x_0) \geq 1 + 4^k a, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Mivel az egyenlőtlenség teljesül $k = 0$ esetén, tegyük fel, hogy az igaz k-ra. Ekkor (1) alapján

$$C\left(2^{k+1}x_0\right) = 2C^2\left(2^k x_0\right) - 1 \geq 2\left(1 + 4^k a\right)^2 - 1 > 1 + 4^{k+1}a.$$

Innen látható, hogy C értéke bármilyen nagy lehet. De mivel az 1. és 3. lemma szerint $C(0) = 1$ és $C(x) \geq 1$ minden x-re, ezért a folytonosságból a lemma utolsó állítása következik. ■

9. lemma. *Legyen $\kappa \geq 0$ és $C = C_\kappa$ a (4) egyenlet megoldása a $C_{0,\gamma}(\mathbb{R})$, $C_{0,\gamma,c}(\mathbb{R})$, $C_{\kappa,\gamma}(\mathbb{R})$, $C_{H,\gamma}(\mathbb{R}), C_{H^{-1},\gamma}(\mathbb{R})$, $C_{0,\gamma}(\Omega_\gamma)$, $C_{\kappa,\gamma}(\Omega_\gamma)$, $C_{H,\gamma}(\Omega_\gamma)$, $C_{H^{-1},\gamma}(\Omega_\gamma)$ osztályok valamelyikében. Ekkor*

$$(31) \quad C(\omega_n) = \tau_n', \text{ ha } C \in C_{H,\gamma}(\Omega_\gamma) \text{ vagy } C \in C_{H,\gamma}(\mathbb{R});$$

$$C(\omega_n) = \tau_n \text{ a többi esetben;}$$

$$(32) \quad C\big((k+1)\omega_n\big) = D_\kappa\big(C(\omega_n), C(k\omega_n)\big) - C\big((k-1)\omega_n\big); \; k, n \in \mathbb{N}, \; k \geq 1.$$

Bizonyítás. A (31) állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Az állítás $n = 0$ esetén a definíciók következménye. Legyenek igazak a (31)-beli egyenlőségek rözített n esetén. Mivel $2\omega_{n+1} = \omega_n$, ezért (20) szerint $\tau_n = C(\omega_n) = g_\kappa\big(C^2(\omega_{n+1})\big)$, és így $\tau_{n+1} = t_\kappa(\tau_n) = t_\kappa\Big(g_\kappa\big(C^2(\omega_{n+1})\big)\Big) = C_(\omega_{n+1})$. A τ_{n+1}'-re a bizonyítás hasonló.

A (32) állítást (4)-ből kapjuk $x = k\omega_n$ és $y = \omega_n$ helyettesítéssel. ■

1. állítás. *Legyen $0 \leq \kappa < 1$ és $C = C_\kappa$ a (4) egyenlet megoldása a $C_{0,\gamma}(\mathbb{R})$, $C_{0,\gamma,c}(\mathbb{R})$, $C_{0,\gamma}(\Omega_\gamma)$, $C_{0,\gamma,c}(\Omega_\gamma)$ osztályok valamelyikében. Ekkor $x, y \in \mathbb{R}$ vagy $x, y \in \Omega_\gamma$ esetén*

$$(33) \qquad C(x+\gamma) = -C(x-\gamma), \; C(x+2\gamma) = C(x-2\gamma) = -C(x),$$

$$C(x+4\gamma) = C(x),$$

$$(34) \quad C_\kappa(x) - C_\kappa(y) = D_\kappa\left(C_\kappa\left(\frac{y-x}{2} - \gamma\right), C_\kappa\left(\frac{x+y}{2} - \gamma\right)\right).$$

A C függvény periodikus 4γ alapperiódussal; C leszűkítése $[0, 2\gamma]$-ra, illetve $\Omega_\gamma \cap [0, 2\gamma]$-ra szigorúan monoton fogyó függvény;

$$\lim_{x\to 0} C(x) = 1, \quad \lim_{x\to 0} C_0(x-\gamma) = 0. \tag{35}$$

Bizonyítás. Az első egyenlőség (4)-ből kapható, hiszen $C(\gamma) = 0$. A (33) alatti többi egyenlőség az első következménye. Ezek után (34) is megkapható (4)-ből.

Mivel 4γ periódusa C-nek, azt kell bebizonyítani, hogy ez a legkisebb pozitív periódus. Ez annak következménye, hogy a C függvény a -1 értéket a $]-2\gamma, 2\gamma]$ intervallumon csak a 2γ helyen veszi fel. Legyen most $0 \le x < y < \gamma$. Ekkor

$$0 < \frac{y-x}{2} \le \frac{y+x}{2} < \gamma, \quad 0 < \gamma - \frac{x+y}{2} < \gamma - \frac{y-x}{2} < \gamma.$$

Ez alapján könnyen látható, hogy (34) jobb oldala pozitív, tehát $C(x) > C(y) > 0 = C(\gamma)$. Ha pedig $\gamma \le x < y < 2\gamma$, akkor (33) és a bizonyítottak következtében $0 \ge C(x) = -C(x-2\gamma) > -C(y-2\gamma) = C(y) > -1 = C(2\gamma)$. Ezzel a monoton tulajdonságot bebizonyítottuk.

A (35) egyenlőségek (18), (28), (29), (31) és a monoton tulajdonság következményei. ■

2. tétel. *Ha $\kappa \in [0, +\infty[$ és $\gamma \in]0, +\infty[$ értékét tetszőlegesen rögzítjük, akkor a (4)-ből kapott függvényegyenletnek pontosan egy nem konstans megoldása van minden egyes $C_{0,\gamma}(\mathbb{R})$, $C_{0,\gamma,c}(\mathbb{R})$, $C_{\kappa,\gamma}(\mathbb{R})$, $C_{H,\gamma}(\mathbb{R})$, $C_{H^{-1},\gamma}(\mathbb{R})$ osztályban. Ezek a megoldások egyenletei rendre:*

$$C_\kappa(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2\gamma}\right), \quad \text{ha } \kappa = 0,\ C_\kappa \in C_{0,\gamma}(\mathbb{R}), \tag{36}$$

$$C_\kappa(x) = \operatorname{ch}\left(\frac{x}{\gamma}\right), \quad \text{ha } \kappa = 0,\ C_\kappa \in C_{H,\gamma}(\mathbb{R}), \tag{37}$$

$$C_\kappa(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{x}{\gamma}\right)}, \quad \text{ha } \kappa = 1,\ C_\kappa \in C_{H^{-1},\gamma}(\mathbb{R}), \tag{38}$$

$$C_\kappa(x) = \operatorname{cn}\left(\frac{Kx}{\gamma}, \kappa\right), \quad \text{ha } 0 < \kappa < 1,\ C_\kappa \in C_{0,\gamma,c}(\mathbb{R}), \tag{39}$$

$$C_\kappa(x) = \operatorname{dn}\left(\frac{Kx}{\gamma}, \frac{1}{\kappa}\right), \quad \text{ha } \kappa > 1,\ C_\kappa \in C_{\kappa,\gamma}(\mathbb{R}). \tag{40}$$

Itt K a (3) egyenlőséggel megadott szám. A (4) egyenletnek a felsoroltakon kívül nincs más $\mathbb{R}$-en definiált folytonos, nem konstans megoldása.

Bizonyítás. Az 1. tétel szerint a felsorolt függvények valóban (4) megoldásai a κ és γ megfelelő értékénél. Az is nyilvánvaló, hogy ezek a függvények a megjelölt osztályba tartoznak. De minden egyes κ-tól és γ-tól függő osztályban pontosan egy megoldás létezik, mégpedig az, amely az Ω_γ halmazon a (31), (32) rekurzív képletekkel, valamint (18)-cal egyértelműen meghatározott. Valóban, e halmaz sűrű $\mathbb{R}$-ben, a felsorolt függvények folytonosak, vagy bizonyos monoton tulajdonságokkal rendelkeznek (l. az 1. állítást a $C_{0,\gamma}(\mathbb{R})$ osztályra vonatkozóan), ezért egyértelműen definiáltak az Ω_γ halmazon megadott értékekkel. Ha például $C_0 \in C_{0,\gamma}(\mathbb{R})$, $0 < x < \gamma$ és $x \notin \Omega_\gamma^\circ$, akkor a $C_0(x)$ érték a C_0 függvény az x pontban és Ω_γ° halmazon vett bal oldali és jobb oldali határértékei között van, amelyek (34) és (35) következtében egyenlőek. Hangsúlyozzuk, hogy a megoldások létezésének ismerete fontos szerepet játszik.

A tétel utolsó állítása abból következik, hogy a 4. és 8. lemma alapján a (4) egyenlet $\mathbb{R}$-en definiált tetszőleges folytonos, nem konstans megoldása a felsorolt osztályok valamelyikébe tartozik. ■

Megjegyzések

1. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a $C_{0,\gamma}$ osztály függvényeiről nem tételeztük fel a folytonosságot, de lényeges, hogy azok pozitívak a $]0,\gamma[$ inervallumon. Később azonban belátjuk, hogy az (1) egyenlet ezen osztályba tartozó megoldása folytonos függvény. Az alábbiakban e megoldást megtaláljuk a cos függvény ismerete nélkül is, így a cos definíciójára új lehetőség nyílik.

2. Az 1. állításban összefoglalt eredmények a 2. tételből is következnek az abban felsorolt függvények ismert tulajdonságai alapján. E függvényekről további állítások is levezethetők csupán a (4) egyenlőség alapján.

3. A cl függvény a (7) egyenlet egyetlen megoldása a $C_{0,\frac{\lambda}{2},c}(\mathbb{R})$ osztályban. Ismertek az alábbi összefüggések [7]:

$$\lambda = \sqrt{2}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad \mathrm{cl}\,(x) = \mathrm{cn}\left(\sqrt{2}x, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

4. A cos és sin, valamint a cn és sn függgyények úgy párosítottak, hogy négyzetösszegük egyenlő 1-gyel. A cl és sl párosításnál ez az összefüggés már nem teljesül. Azonban egyszerűbbek az ún. visszavezetési képletek (ezek a klasszikus trigonometrikus képletekhez hasonlóak):

$$\mathrm{cl}\left(x - \frac{\lambda}{2}\right) = \mathrm{sl}\,(x), \quad \mathrm{cl}\,(\lambda - x) = \mathrm{cl}\,(\lambda + x) = -\,\mathrm{cl}\,(x), \quad \mathrm{cl}\,(2\lambda + x) = \mathrm{cl}\,(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

E képletek figyelembevételével (7)-ből azt kapjuk, hogy

$$\frac{2\,\mathrm{cl}^2(x)}{1 + 2\,\mathrm{cl}^2(x) - \mathrm{cl}^4(x)} + \frac{2\,\mathrm{sl}^2(x)}{1 + 2\,\mathrm{sl}^2(x) - \mathrm{sl}^4(x)} = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ez viszont ekvivalens az ismert $\mathrm{cl}^2(x) + \mathrm{sl}^2(x) + \mathrm{cl}^2(x)\,\mathrm{sl}^2(x) = 1$ azonossággal. Ennélfogva a cl és sl függvények értékei azonosak az $x^2 + y^2 + x^2y^2 = 1$ negyedrendű görbe pontjainak koordinátáival.

5. A dn függvény kifejezhető a cn vagy sn függvényekkel a következőképpen [9]:

$$\mathrm{dn}\,(x,k) = \pm\sqrt{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(x,k)} = \pm\sqrt{1 - k^2 + k^2\,\mathrm{cn}^2(x,k)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Itt a gyök előjelét úgy kell megválasztani, hogy a $\mathrm{dn}\,(0) = 1$ egyenlőség teljesüljön, és a kiterjesztés $\mathbb{R}$-re folytonos és differenciálható legyen.

6. Ismert [8], hogy a 2. tételben közölt függvények analitikusak, és kiterjeszthetők a komplex síkra mint egész vagy meromorf függvények. H. Haruki bebizonyította [11], hogy csak a 0 konstans és cn függvény elégíti ki a

$$\big[C(x+y) + C(x-y)\big]\big[C^2(x) + C^2(y)\big] = 2C(x)C(y)\big[C(x+y)C(x-y) + 1\big]$$

függvényegyenletet a $\mathbb{C}$-ben meromorf függvények osztályában.

Az (1) egyenlet megoldásainak konstruálása

E szakaszban azt mutatjuk be, hogy a cos és ch függvények definiálhatók úgy is, mint az (1) egyenlet megoldásai a $C_{0,\frac{\pi}{2}}(\mathbb{R})$, illetve $C_{H,1}(\mathbb{R})$ osztályban. Ehhez a megoldások létezését szükséges bizonyítani, amit a megoldás egyszerű konstruálásával végzünk el. Először is a π szám új definíciójára van szükségünk.

A korábban definiált $(\tau_n) = \big(\tau_n(0)\big)$ sorozatra a $\tau_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\tau_n}$, $4 - 4\tau_n^2 = 2 - 2\tau_{n-1}$, $\tau_n < 1$, $\tau_n < \tau_{n+1}^2$ összefüggések érvényesek, ezért a $p_n := 2^n\sqrt{2 - 2\tau_{n-1}}$, $q_n := p_n(\tau_n)^{-1}$ jelölésekkel azt kapjuk, hogy

$$p_{n+1} = 2^{n+1}\frac{\sqrt{4 - 4\tau_n^2}}{\sqrt{2 + 2\tau_n}} = \frac{2^n}{\tau_{n+1}}\sqrt{2 - 2\tau_{n-1}} = \frac{p_n}{\tau_{n+1}} > p_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$q_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{\tau_{n+1}} = \frac{p_n}{\tau_{n+1}^2} = \frac{\tau_n}{\tau_{n+1}^2}q_n < q_n, \qquad n \in \mathbb{N}^+.$$

Nyilván a (q_n) monoton fogyó sorozat korlátos alulról 0-val, tehát konvergens. Vele együtt konvergens (p_n) is, hiszen $p_n = q_n\tau_n$, és $\lim_{n\to\infty}\tau_n = 1$. Ezért korrekt a következő

Definíció. A

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} 2^n\sqrt{2 - 2\tau_{n-1}}$$

határértéket π-vel jelöljük és *pinek* nevezzük.

Gyakorlatként lássuk be, hogy az itt definiált π szám megegyezik a geometriából ismert számmal, azaz minden körvonal hosszának és átmérőjének arányával.

Vezessük be a $(C_{k,n}) : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ kétszeres sorozatot rekurzív módon:

$$(41) \qquad C_{0,n} = 1, \quad C_{1,n} = \tau_n, \quad C_{k+1,n} = 2\tau_n C_{k,n} - C_{k-1,n}, \quad n,k \in \mathbb{N},\ k > 0.$$

Hasonlóképpen definiáljuk a $(C'_{k,n})$ kétszeres sorozatot (τ'_n)-nel.

10. lemma. $C_{k_1,n_1} = C_{k_2,n_2}$, $C'_{k_1,n_1} = C'_{k_2,n_2}$, ha $k_1\omega_{n_1} = k_2\omega_{n_2}$; $k_1, n_1, k_2, n_2 \in \mathbb{N}$.

A **bizonyítás** megtalálható [9]-ben, de önállóan is elvégezhető indukciót alkalmazva. E lemma alapján definiálhatók a Cos és Ch függvények az $\Omega_{\frac{\pi}{2}}$, illetve Ω_1 halmazon a következőképpen ($k, n \in \mathbb{N}$):

$$\text{(42)} \qquad \operatorname{Cos}\left(k\omega_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) := \operatorname{Cos}\left(-k\omega_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) := C_{k,n},$$

$$\operatorname{Ch}\left(k\omega_n(1)\right) := \operatorname{Ch}\left(-k\omega_n(1)\right) := C'_{k,n}.$$

11. lemma. *A* Cos *függvény (a* Ch *függvény) az* (1) *egyenlet egyetlen megoldása a* $C_{0,\frac{\pi}{2}}\left(\Omega_{\frac{\pi}{2}}\right)$ *osztályban (a* $C_{H,1}(\Omega_1)$ *osztályban). A* Cos *függvény (a* Ch *függvény) szigorúan monoton csökkenő (növekvő) az* $\Omega_{\frac{\pi}{2}} \cap [0, \pi]$ *halmazon (az* $\Omega_1 \cap [0, +\infty[$ *halmazon).*

Bizonyítás. 1. Igazoljuk az első állítást a Cos függvényről. Lássuk be, hogy Cos az (1) egyenlet megoldása. Nyilván az (1) egyenlőség teljesül, ha $x = 0$ vagy $y = 0$. Legyenek x és y az $\Omega_{\frac{\pi}{2}}$ halmaz pozitív elemei. Találhatók olyan m, n, l természetes számok, hogy $x = m\omega_l$, $y = n\omega_l$. Az l számot rögzítve jelöljük a $\operatorname{Cos}(j\omega_l)$ értéket röviden C_j-vel, $j \in \mathbb{Z}$. Így a

$$\text{(43)} \qquad C_{m+n} + C_{m-n} = 2C_mC_n; \quad m, n \in \mathbb{N}$$

állítást kell bebizonyítani. Indukciót alkalmazunk n szerint tetszőleges rögzített m mellett. A (43) egyenlőség teljesül (41) következtében, ha $n = 0$ és $n = 1$, bármilyen is m. Tegyük fel, hogy (43) igaz, amikor $n = p - 1$ és $n = p$, az m pedig tetszőleges. Ekkor (41) alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
C_{m+(p+1)} &= C_{(m+p)+1} = 2C_1C_{m+p} - C_{m+p-1} = \\
&= 2C_1(2C_mC_p - C_{m-p}) - C_{m+p-1} = \\
&= 4C_1C_mC_p - (C_{m-p+1} + C_{m-p-1}) - C_{m+p-1} = \\
&= 4C_1C_mC_p - (C_{m-(p-1)} + C_{m+(p-1)}) - C_{m-p-1} = \\
&= 4C_1C_mC_p - 2C_mC_{p-1} - C_{m-p-1} = \\
&= 2C_m(2C_1C_p - C_{p-1}) - C_{m-p-1} = 2C_mC_{p+1} - C_{m-(p+1)}.
\end{aligned}$$

Ezzel az indukció véget ért. Ha $x > 0$ és $y < 0$, akkor $-y > 0$ és a bizonyítottak alapján

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cos}(x - y) &= \operatorname{Cos}\left(x + (-y)\right) = 2\operatorname{Cos}(x)\operatorname{Cos}(-y) - \operatorname{Cos}\left(x - (-y)\right) = \\
&= 2\operatorname{Cos}(x)\operatorname{Cos}(y) - \operatorname{Cos}(x + y).
\end{aligned}$$

Az $x < 0$, $y < 0$ esetben hasonlóképpen járunk el. Tehát a Cos valóban megoldása (1)-nek az $\Omega_{\frac{\pi}{2}}$ halmazon. Az állítás igazolása Ch-ra ugyanolyan.

2. Nyilván $\mathrm{Ch}\,(1) = C'_{1,0} = \tau'_0 = H$, ezért $\mathrm{Ch} \in C_{H,1}(\Omega_1)$.

Igazoljuk, hogy $\mathrm{Cos} \in C_{0,\frac{\pi}{2}}\left(\Omega_{\frac{\pi}{2}}\right)$. Evidens, hogy $\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Ezután a $\mathrm{Cos}\,(x) > 0$ egyenlőtlenséget kell belátni, ha $x \in \Omega^{\circ}_{\frac{\pi}{2}}$. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és A_n az olyan $k\omega_n$ számok halmaza, amelyekre k páratlan egész szám, valamint $1 \leq k < 2^n$. Például $A_1 = \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$, $A_2 = \left\{\frac{\pi}{16}, \frac{3\pi}{16}\right\}$. Nyilván $A_n \subset \Omega^{\circ}_{\frac{\pi}{2}}$. Fordítva, ha $k\omega_n \in \Omega^{\circ}_{\frac{\pi}{2}}$ és k páros szám, akkor $k\omega_n = \frac{k}{2}\omega_{n-1}$, ezért van olyan m, hogy $1 \leq m < n$ és $k\omega_n \in A_m$. Tehát $\cup\{A_n \mid n \in \mathbb{N}^+\} = \Omega^{\circ}_{\frac{\pi}{2}}$.

Indukciót alkalmazunk. Igaz, hogy $\mathrm{Cos}\,(x) > 0$, ha $x \in A_1$. Tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség teljesül, ha $x \in A_m$ és $m \leq n$. Ekkor (41) és (42) szerint A_{n+1} minden elemére igaz a

$$(44) \quad \mathrm{Cos}\,(k\omega_{n+1}) = \{\mathrm{Cos}\,\big((k-1)\omega_{n+1}\big) + \mathrm{Cos}\,\big((k+1)\omega_{n+1}\big)\}\big(2\,\mathrm{Cos}\,(\omega_{n+1})\big)^{-1}$$

egyenlőség. A $k+1$ és $k-1$ számok itt párosak, ezért a $(k-1)\omega_{n+1}$ és $(k+1)\omega_{n+1}$ számok vagy A_m elemei bizonyos $m \leq n$ esetén, vagy egyenlőek 0-val, illetve $\frac{\pi}{2}$-vel. Az is igaz, hogy $\mathrm{Cos}\,(\omega_{n+1}) = \tau_{n+1} > 0$, ezért (44) jobb oldala pozitív, vagyis $\mathrm{Cos}\,(x) > 0$, ha $x \in A_{n+1}$. Az indukcióelv alapján $\mathrm{Cos}\,(x) > 0$, ha $x \in \Omega^{\circ}_{\frac{\pi}{2}}$. Tehát Cos a $C_{0,\frac{\pi}{2}}\left(\Omega_{\frac{\pi}{2}}\right)$ osztály eleme.

3. Az, hogy a Cos és Ch függvények a megfelelő osztályok egyetlen elemei, a 9. lemmából következik.

4. A Cos függvény monoton tulajdonsága az 1. állításban bizonyított. Az állítás Ch-ról könnyen bizonyítható a (22) egyenlőtlenség alapján. Valóban, ha $x, y \in \Omega_1$ és $x < y$, akkor található olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $x = l\omega_n$, $y = m\omega_n$ és $l < m$. Ezután (22)-t alkalmazzuk. Vegyük figyelembe azt is, hogy a (τ'_n) sorozat szigorúan csökkenő. ∎

12. lemma. *Minden x-re $\mathbb{R}$-ből találhatók olyan* $\cos\,(x)$ *és* $\mathrm{ch}\,(x)$ *számok, hogy*

$$(45) \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Cos}\,\big(u_n(x) - \omega_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Cos}\,\big(u_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Cos}\,\big(v_n(x)\big) = \cos\,(x),$$

$$(46) \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ch}\,\big(u_n(x) - \omega_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ch}\,\big(u_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ch}\,\big(v_n(x)\big) = \mathrm{ch}\,(x).$$

Bizonyítás. Az 1. állítás következtében (45)-öt csak az $x \in [0, \pi]$ feltétel mellett szükséges bizonyítani. De a 11. lemma alapján a Cos függvény monoton csökkenő a $[0, \pi]$ intervallumon. Viszont az $\big(u_n(x)\big)$, $\big(u_n(x) - \omega_n\big)$, $\big(v_n(x)\big)$ sorozatok egy indextől kezdve monoton módon közelednek x-hez. Ezért a (45)-beli határértékek léteznek. Csak az utolsó kettő egyenlőségét szükséges bizonyítani. Ez pedig a (34) és (35) egyenlőségek következménye.

A (46) állítások hasonlóképpen bizonyíthatók a 11. lemma alapján. A (46)-beli határértékek egyenlősége következőképpen igazolható. Az (1) egyenlőség és a monoton tulajdonságok alapján

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Ch}\,\big(v_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ch}\,\big(u_n(x)+\omega_n\big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\tau_n' \,\mathrm{Ch}\,\big(u_n(x)\big) - \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ch}\,\big(u_n(x)-\omega_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ch}\,\big(u_n(x)\big). \quad \blacksquare$$

A (45) és (46) egyenlőségek lehetőséget adnak a cos és ch függvények új meghatározására.

Definíció. Az $x \mapsto \cos(x)$ és $x \mapsto \mathrm{ch}\,(x)$, $x \in \mathbb{R}$ hozzárendeléssel definiált függvényeket *koszinusznak*, illetve *koszinusz hiperbolikusznak* nevezzük.

3. tétel.

1. *A* cos *(a* ch*) függvény leszűkítése* $\Omega_{\frac{\pi}{2}}$*-re* $(\Omega_1$*-re) megegyezik* Cos*-szal* (Ch*-val).*
2. *A* cos *és* ch *függvények folytonosak.*
3. *Az* $x \mapsto \cos(\alpha x)$, $x \mapsto \mathrm{ch}\,(\alpha x)$, $x \in \mathbb{R}$ *függvények az* (1) *egyenlet egyetlen megoldásai a* $C_{0,\frac{\pi}{2\alpha}}(\mathbb{R})$, *illetve* $C_{H,\frac{1}{\alpha}}(\mathbb{R})$ *osztályban* $\big(\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\big)$. *Ezektől különböző folytonos, nem konstans megoldása az* (1) *egyenletnek nincs.*

Bizonyítás. 1. Ha $x = k\omega_m$, akkor $n \ge m$ esetén

$$u_n(x) = \left[\frac{k\omega_m}{\omega_n}\right]\omega_n = k2^{n-m}\omega_n = k\omega_m = x,$$

ezért a tétel 1. állítása igaz.

2. Bizonyítsuk a cos folytonosságát egy $x \in \,]0,\pi[$ helyen (vagy a ch folytonosságát egy $x \in \,]0,+\infty[$ helyen). Alkalmazzuk a 11. és 12. lemmát. Legyen (x_n) a megadott halmazon belüli x-hez tartó sorozat. A (45) miatt tetszőleges pozitív ε-hoz található olyan n_1, hogy $\cos x - \varepsilon < \mathrm{Cos}\,\big(v_{n_1}(x)\big) < \cos x < \mathrm{Cos}\,\big(u_{n_1}(x)-\omega_{n_1}\big) < \cos x + \varepsilon$. Létezik olyan n_2, hogy minden $n > n_2$ esetén $\cos x - \varepsilon < \mathrm{Cos}\,\big(v_{n_1}(x)\big) < \mathrm{Cos}\,\big(v_n(x_n)\big) \le \cos(x_n) \le \mathrm{Cos}\,\big(u_n(x_n)-\omega_n\big) < \mathrm{Cos}\,\big(u_{n_1}(x)-\omega_{n_1}\big) < \cos x + \varepsilon$. Tehát a cos folytonos az x helyen. A ch függvény folytonossága x-ben vagy cos folytonossága 0-ban, 1-ben vagy $\mathbb{R}$ más pontjában hasonlóképpen igazolható.

3. Legyenek x és y tetszőleges valós számok. A 6. és 11. lemma alapján

$$\mathrm{Cos}\,\big(u_n(x)+u_n(y)\big) + \mathrm{Cos}\,\big(u_n(x)-u_n(y)\big) = 2\,\mathrm{Cos}\,\big(u_n(x)\big)\,\mathrm{Cos}\,\big(u_n(y)\big), \quad n \in \mathbb{N},$$

ami a tétel 1. állítása szerint

$$\cos\big(u_n(x)+u_n(y)\big) + \cos\big(u_n(x)-u_n(y)\big) = 2\cos\big(u_n(x)\big)\cos\big(u_n(y)\big), \quad n \in \mathbb{N}$$

alakban is írható. Innen a cos folytonossága és a 6. lemma alapján kapjuk, hogy $\cos(x+y)+\cos(x-y) = 2\cos(x)\cos(y)$. Nyilván a $x \mapsto \cos(\alpha x)$, $x \in \mathbb{R}$ függvény az (1) egyenlet megoldása, és a $C_{0,\frac{\pi}{2\alpha}}(\mathbb{R})$ osztályba tartozik. A 2. tétel szerint ez egyetlen megoldása (1)-nek ebben az osztályban. A tétel állítása ch-ról hasonlóképpen bizonyítható. Az utolsó állítás már a 2. tételben bizonyított. $\blacksquare$

Az (1) egyenlet mint az elemi függvények forrása

Befejezésül a D'Alembert – Poisson-függvényegyenlet kimagasló értékére szeretnénk rámutatni. Ereje abban rejlik, hogy megoldásaival az elemi függvények mindegyike új módszerrel definiálható, és tulajdonságaik (1)-ből levonhatók. Példaként nézzünk néhányat a legfontosabbak közül.

Definíció. A *szinusz, szinusz hiperbolikusz* és exp *exponenciális* függvényt a megszokott jelölésekkel az alábbi egyenlőségekkel definiáljuk:

$$\sin x := \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{47}$$

$$\operatorname{sh} x := \operatorname{sgn}(x)\sqrt{\operatorname{ch}^2(x) - 1}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{48}$$

$$\exp x := \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{49}$$

A cos, sin, ch függvényekre néhány összefüggés levonható a fentiekből (l. a [9] könyvet is). Bizonyítsunk be (1) és a definíciók alapján néhány jól ismert azonosságot.

2. állítás. *Minden x és y-ra teljesülnek az alábbi egyenlőségek:*

$$\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x, \quad \operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \tag{50}$$

$$\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}, \quad \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}, \tag{51}$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \tag{52}$$

$$\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y. \tag{53}$$

Bizonyítás. A (48) és (20) egyenlőségek alapján $\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = \operatorname{ch}(2x)$, ezért (50) első egyenlősége igaz. Nyilván (51) első egyenlősége (20) következménye. Az (50) és (51) második egyenlőségeiben az előjelek megegyezése miatt négyzetre emeléssel ekvivalens egyenlőségeket kapunk: $\operatorname{sh}^2(2x) = 4\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x$, $2\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{ch} x - 1$. De ezek teljesülnek, mert

$$\operatorname{sh}^2(2x) = \operatorname{ch}^2(2x) - 1 = \left(2\operatorname{ch}^2 x - 1\right)^2 - 1 = 4\operatorname{ch}^2 x\left(\operatorname{ch}^2 x - 1\right) = 4\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x,$$

$$2\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2 = \operatorname{ch} x - 1.$$

Kissé összetettebb (52) bizonyítása. Az első azonosságot

$$\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \tag{54}$$

alakra hozva lássuk be, hogy mindkét oldal előjele azonos. Ez nyilván igaz, ha $x = 0$, vagy $y = 0$, vagy $x = y$, vagy $x = -y$. Legyen $|y| < |x|$. Ha $x > 0$, $y > 0$, akkor

$\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y > 0$, és $\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch}(x-y) > \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x > 0$. Ha $x > 0$, $y < 0$, akkor $\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y < 0$, és $\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y < \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y < 0$. A többi eset ezekre hozható.

Az (54) egyenlőség mindkét oldalát négyzetre emelve ekvivalens azonosságot kapunk, amely az

$$1 + \operatorname{ch}(x+y) \operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{ch}^2 y \tag{55}$$

azonosság alapján következőképpen bizonyítható:

$$\begin{aligned}
&\big(\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y\big)^2 = \operatorname{ch}^2(x+y) - 2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y = \\
&= \operatorname{ch}^2(x+y) - \operatorname{ch}(x+y)\big(\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)\big) + \operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y = \\
&- \operatorname{ch}(x+y) \operatorname{ch}(x-y) + \operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y = 1 - \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y = \\
&= \big(\operatorname{ch}^2 x - 1\big)\big(\operatorname{ch}^2 y - 1\big) = \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y.
\end{aligned}$$

Az (55) azonosság a $2u = x + y, 2v = x - y$ helyettesítéssel a következőből kapható meg:

$$\begin{aligned}
1 + \operatorname{ch} 2u \operatorname{ch} 2v &= (\operatorname{ch} 2u + 1)(\operatorname{ch} 2v + 1) - \operatorname{ch} 2u - \operatorname{ch} 2v = \\
&= 4 \operatorname{ch}^2 u \operatorname{ch}^2 v - \operatorname{ch} 2u - \operatorname{ch} 2v = \\
&= 4 \operatorname{ch}^2 u \operatorname{ch}^2 v - 2 \operatorname{ch}(u+v) \operatorname{ch}(u-v) = \operatorname{ch}^2(u+v) + \operatorname{ch}^2(u-v).
\end{aligned}$$

A fentihez hasonlóképpen igazolható, hogy (52) második egyenlőségének mindkét oldala azonos előjelű, tehát alkalmazható a négyzetre emelés. Ennélfogva

$$\begin{aligned}
&\left(\operatorname{ch} x \operatorname{sgn}(y)\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1} + \operatorname{ch} y \operatorname{sgn}(x)\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}\right)^2 = \\
&= 2 \operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y - \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y + 2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \\
&= 2 \frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2} \frac{1 + \operatorname{ch} 2y}{2} - \frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2} - \frac{1 + \operatorname{ch} 2y}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x \operatorname{sh} 2y = \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x \operatorname{ch} 2y - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\big(\operatorname{ch}(2(x+y)) - \operatorname{ch} 2x \operatorname{ch} 2y\big) = \\
&= -1 + \frac{1 + \operatorname{ch}\big(2(x+y)\big)}{2} = \operatorname{ch}^2(x+y) - 1 = \operatorname{sh}^2(x+y).
\end{aligned}$$

Igazoljuk végül az (53) azonosságot:

$$\begin{aligned}
\exp(x+y) &= \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y = \\
&= \exp x \cdot \exp y. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Megjegyzés. A (49) egyenlőségből látható, hogy

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\big(\exp x + \exp(-x)\big), \quad \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\big(\exp x - \exp(-x)\big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Az (53) azonosság alapján az exp függvény az $f(x+y) = f(x)f(y)$ függvényegyenlet olyan folytonos megoldása, amely kielégíti az $f(1) = \mathrm{e}$ feltételt. Tudjuk [12], hogy exp az egyetlen ilyen tulajdonsággal rendelkező függvény.

A differenciálás szempontjából fontos szerepe van a következő állításnak, amely a geometria alkalmazása nélkül nehezen bizonyítható, hiszen nem ismerjük a sin függvény sorba fejtését.

4. tétel. *Fennáll az alábbi egyenlőség:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{56}$$

A **bizonyítás** megtalálható [9]-ben és [10]-ben.

Köszönetnyilvánítás. A dolgozatról előadást tartottam a Debreceni Egyetem Matematikai Intézete szemináriumán. Ezúttal mondok köszönetet Daróczy Zoltánnak, Páles Zsoltnak és debreceni kollégáimnak a szívélyes bírálatokért és tanácsokért.

Irodalom

[1] A. L. Cauchy, *Analyse algébrique* (1821); (5. fejezet).

[2] A. L. Cauchy, *Algebraische Analysis* (Berlin, 1885); (5. fejezet).

[3] J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen* (Basel – Stuttgart, 1961); (§ 3.2.2; § 2.5.2).

[4] L. Vietoris, Zur Kennzeichnung des Sinus und verwandter Funktionen durch Funktionengleichungen, *J. reine angew. Math.*, **186** (1944/49), 1–15.

[5] E. Vincze, D'Alembert – Poisson-függvényegyenlet egyik általánosítása, *Mat. Lapok,* **12** (1961), 18–31.

[6] Pl. Kannappan, *Functional Equations and Inequalitis with Applications* (Dordrecht, Heidelberg, London, New York, 2009).

[7] A. Markusevics, *Csodálatos szinuszok. Bevezetés az elliptikus függvények elméletébe* (Moszkva, 1965) (orosz nyelven).

[8] A. Hurvitz, R. Courant, *Függvényelmélet* (Moszkva, 1968).

[9] F. Gecse, *Trigonometria funkcionális alapon* (Ungvár, 2009).

[10] F. Gecse, A trigonometria újszerű előadásáról, *Az Ungvári egyetem folyóirata,* **6** (2001), 15–24.

[11] H. Haruki, On a functional equation for Jacobi's elliptic function cn (z, κ), *Acquationes Math.*, **27** (1984), 317–321.

[12] J. Dieudonné, *Foundations of modern Analysis* (New York and London, 1960) (4. fejezet).

Frigyes Gecse: Continuous solutions of a parametrically generalized D'Alembert – Poisson functional equation

We provide real continuous solutions on R of

$$C(x+y)+C(x-y)=\frac{2C(x)C(y)}{1-\kappa^2\big(1-C^2(x)\big)\big(1-C^2(y)\big)},\quad \kappa\in[0,+\infty[$$

generalization of the now classic D'Alembert – Poisson equation in terms of cos and ch as well as cn and dn Jacobi elliptic functions. We also point out that the D'Alembert – Poisson equation is suitable for a new definition of the cos, ch and therefore all elementary functions and the derivation of their proper with elementary techniques.

Gecse Frigyes
Debreceni Egyetem
`fgecse@gportal.hu`

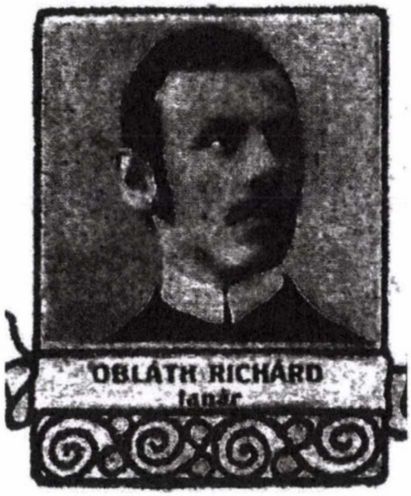
ADALÉKOK A MAGYAR MATEMATIKATÖRTÉNET MÚLTJÁBÓL

OBLÁTH RICHÁRD MÓR
(Versec, 1882. június. 11. – Budapest, 1959. június. 18.)

DR. KÁNTOR SÁNDORNÉ

Obláth Richárdról, a délvidékről származó matematikusról, matematikatanárról halálának 50. évfordulója alkalmából emlékezünk meg.

Meglepő, hogy öt matematikus született a 19. század végén, illetve a 20. század elején, *Versecen,* Temes megyében: *Wodetzky József* matematikus csillagász (1872–1956), *Obláth Richárd* (1882–1959), *Neukomm Gyula* (1892–1957), *Szidon Simon* (1892–1944) és *Cofman Judit* (1936–2001).



Obláth Richárd életrajza, pályafutása

Obláth Richárd Mór Versecen (ma Szerbia) született 1882. június 11-én. Szülei: *Obláth Antal Mór* és *Katscher Jenny Mária.* Édesapja Versecen volt postaigazgató.

Húga, Obláth Mária Miranda, 1889-ben született. A budapesti Tudományegyetemen szerzett diplomát és doktori címet.[1] Egy ideig a Málnai-féle középiskolában tanított, majd 1930-tól banktisztviselő lett.

Obláth Richárd iskoláit Versecen kezdte el, de a család később elköltözött Nagykanizsára. 1891–99 között a Nagykanizsai Kegyesrendi Katolikus Főgimnázium tanulója. Tanárai közül *Dr. Vörös Cyrill* nevét emeljük ki, aki matematikatanára és osztályfőnöke volt. Megállapítható, hogy matematikatanárának érdeklődési területe hatással volt későbbi munkásságára.

Vörös Cyrill 1893–1899 között fiatal tanárként tanított Nagykanizsán a Kegyesrendi Katolikus Főgimnáziumban. 1892-ben Kolozsváron doktorált fizikából. Később tankönyveket írt középiskolák számára fizikából és a matematikai és fizikai földrajz elemeiből. Érdekes munkája az *Analitikus Bolyai-féle geometria* (I. kötet. Síkgeometria, 1909).

Szeretett gimnáziumi tanáráról a *Tudós kutató középiskolai tanárok* (2. közlemény) című cikkében így emlékezett meg Obláth Richárd:

„Tudományos munkássága a nemeuklideszi geometria különböző problémáinak fejtegetéséből áll. Ismeretes, hogy már Gauss felszólította Bolyait a tetraéder köbtartalmának meghatározására, amely azonban nem fejezhető ki az analízis szokásos függvényeivel. Hasonló feladat a maximális térfogatú hexaéderek köbtartalmának a kiszámítása. Vörös az itt szereplő rész-aggregátumokat vizsgálja, és ezek összekapcsolásával tudja csak látszólag egyszerűbb módon kifejezni ezeknek az alakzatoknak a köbtartalmát. Foglalkozott továbbá az állandó görbületű felületekkel a Bolyai geometriában. Vizsgálta a folytonossági axiómák szerepét. Ez a kérdés természetesen vezette el a szemi-archimédeszi hiperbolikus geometriához. Magyarul megírt két kötetes nagy munkában, eszperantó nyelven egy kis füzetben, fejti ki a Bolyai-féle sík analitikai geometriáját."

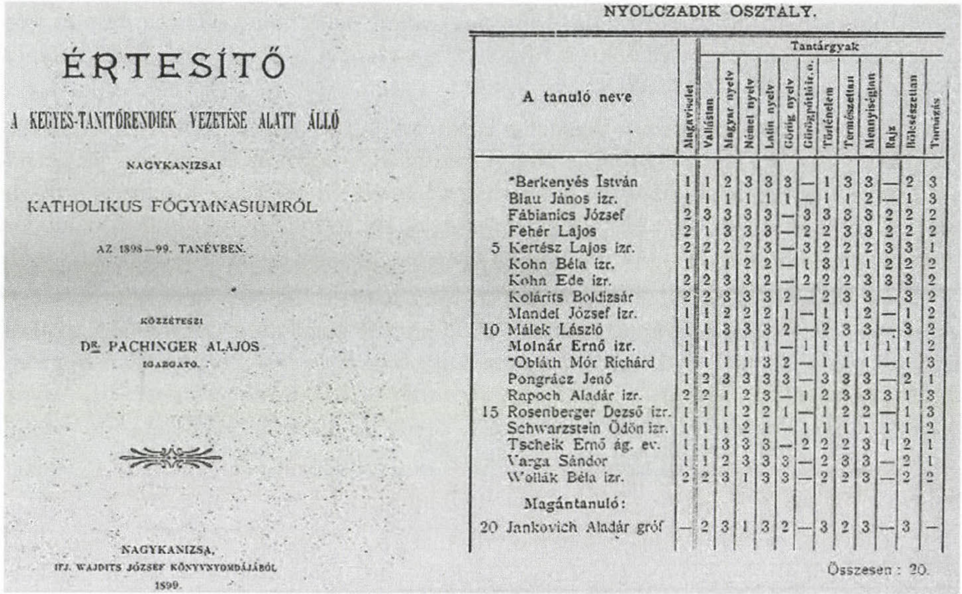
Nem volt minden tantárgyból jó tanuló, de a Középiskolai Matematikai Lapok feladatainak megoldásába bekapcsolódott. Nevét a feladatmegoldók között az 1898/1899-es években ott találjuk, de nem közölték egyetlen megoldását sem, nem volt ott a kiemelt, megdicsért, legszorgalmasabb tanulók között.

Nagykanizsán a Kegyesrendi Katolikus Főgimnáziumban az 1898/99-es tanévben kitűzött, *„Általánosan bebizonyítandó, hogy a reciprok egyenlet szimmetrikus"* című pályatételre beadott munkáját második díjjal jutalmazták.

Jó rendűen érettségizett 1899-ben. Felsőfokú tanulmányait a budapesti Tudományegyetemen folytatta. 1903-ban tett szakvizsgát, 1905-ben kapta meg matematika–fizika szakos tanári diplomáját. Tanított a podolini Kegyesrendi Gimnáziumban (1903/04)[2], a rozsnyói (1904–1906) gimnáziumban. Érdekes, hogy Rozsnyón

[1] Dr. Obláth Mária Miranda 1911-ben írt „Wieland és Aristo" című díjnyertes pályamunkáját jegyzi a Gulyás-gyűjtemény, illetve megtalálható az ELTE könyvtárában.

[2] A podolini Kegyesrendi Gimnázium igazgatója Hogyor József volt ebben az időszakban. Hogyor Józsefről többet a Kántor Sándorné: *Tudós matematikatanárok Hajdú-Bihar, Szabolcs-Szatmár és Szolnok megyében (1850–1948)*, 2. bővített és javított kiadás (2009) MEK munkában találunk.



ÉRTESÍTŐ

A KEGYES-TANITÓRENDIEK VEZETÉSE ALATT ÁLLÓ

NAGYKANIZSAI

KATHOLIKUS FÓGYMNASIUMRÓL

AZ 1898—99. TANÉVBEN.

KÖZZÉTESZI

DR. PACHINGER ALAJOS

IGAZGATÓ.

NAGYKANIZSA,

IFJ. WAJDITS JÓZSEF KÖNYVNYOMDÁJÁBÓL

1899.

NYOLCZADIK OSZTÁLY.

A tanuló neve	Magaviselet	Tantárgyak: Vallástan	Magyar nyelv	Német nyelv	Latin nyelv	Görög nyelv	Görögpótló ir. o.	Történelem	Természettan	Mennyiségtan	Rajz	Bölcsészettan	Tornázás
*Berkenyés István	1	1	2	3	3	3	—	1	3	3	—	2	3
Blau János izr.	1	1	1	1	1	1	—	1	1	2	—	1	3
Fábianics József	2	3	3	3	3	—	3	3	3	3	2	2	2
Fehér Lajos	2	1	3	3	3	—	2	2	3	3	2	2	2
5 Kertész Lajos izr.	2	2	2	2	3	—	3	2	2	2	3	3	1
Kohn Béla izr.	1	1	1	2	2	—	1	3	1	1	2	2	2
Kohn Ede izr.	2	2	3	3	2	—	2	2	2	3	3	3	2
Kolárits Boldizsár	2	2	3	3	3	2	—	2	3	3	—	3	2
Mandel József izr.	1	1	2	2	2	1	—	1	1	2	—	1	2
10 Málek László	1	1	3	3	3	2	—	2	3	3	—	3	2
Molnár Ernő izr.	1	1	1	1	1	—	1	1	1	1	1	1	2
*Obláth Mór Richárd	1	1	1	1	3	2	—	1	1	1	—	1	3
Pongrácz Jenő	1	2	3	3	3	3	—	3	3	3	—	2	1
Rapoch Aladár izr.	2	2	1	2	3	—	1	2	3	3	3	1	3
15 Rosenberger Dezső izr.	1	1	1	2	2	1	—	1	2	2	—	1	3
Schwarzstein Ödön izr.	1	1	1	2	1	—	1	1	1	1	1	1	2
Tscheik Ernő ág. ev.	1	1	3	3	3	—	2	2	2	3	1	2	1
Varga Sándor	1	1	2	3	3	3	—	2	3	3	—	2	1
Wollák Béla izr.	2	2	3	1	3	3	—	2	2	3	—	2	2
Magántanuló:													
20 Jankovich Aladár gróf	—	2	3	1	3	2	—	3	2	3	—	3	—

Összesen: 20.

a matematika és természettan mellett magyar és német nyelvet, illetve természeti földrajz tantárgyakat is oktatott.

1906-ban lett az ungvári Római Katolikus Gimnázium tanára. Itt választották meg rendes tanárnak 1907-ben. Tankönyvként Suták József Algebra könyvét használták.[3]

A nagykanizsai Kegyesrendi Katolikus Főgimnáziumban, mint diák találkozott az alkoholellenes mozgalommal, és tanárként továbbfolytatta a diákok alkoholizmusa elleni harcot. *Az alkoholizmus élettani és ethikai hatásai* címen az ungvári katolikus Főgimnázium Értesítőjébe (1906/07) írt cikket.[4]

Hasonlóan, diákkorából hozta magával a feladatmegoldás szeretetét, és ezt az ungvári Római Katolikus Gimnáziumban átültette diákjaiba is. Az 1906/07. tanévben megszervezte a Dayka Gábor-önképzőkör matematikai tagozatát.

Diákjai közül többen bekapcsolódtak a Középiskolai Matematikai Lapok feladatmegoldó versenyébe. Négy évig, 1906–1909-ig volt az ungvári Római Katolikus Gimnázium tanára, és ez idő alatt a Dayka Gábor-önképzőkör matematikai osztályának vezetője. Minden évben beszámolt a matematikai kör tevékenységéről és a tehetséggondozás elveiről. Megpróbálkozott pályatétel meghirdetésével, de ez a kísérlet nem járt sikerrel a diákok körében.

[3]Suták József piarista pap, matematikaprofesszor is a Délvidékről származott (Szabadka, 1865 – Budapest, 1954).

[4]Ezzel a témával a későbbiekben húga, *Dr. Obláth Mária Miranda* is foglalkozott, aki *Az alkoholizmus ellen* címmel írt cikket 1910-ben.

1909. február 7-én áthelyezték a budapesti III. kerületi Főgimnáziumba, de ott gyakorlatilag nem tanított[5], mert állást cserélt *Makoldy Viktorral*[6], a budapesti *V. kerületi Állami Főreáliskola*[7] matematikatanárával. Így lett Obláth Richárd a híres Markó utcai Főreál tanára, ahol matematikát és rajzológeometriát tanított.

Meg kell említenünk, hogy Ungváron az 1909/1910. tanévben Obláth utóda Geőcze Zoárd lett[8], majd 1910-től már a Markó utcai Főreálban tanított Geőcze Zoárd is. Ebben az időszakban a Markó utcai Főreálban gyakorolt Pólya György.

Az 1913/14-es tanévben tanította Prónai Jenőt, aki 1914-ben az XXI. Eötvös versenyen második díjat kapott. *Rátz László* jelentése szerint: „A második díjat a bizottság *Prónai Jenőnek* ítéli, aki a budapesti V. ker. állami főreáliskolában *Obláth Richárd* tanítványa volt. Az első és harmadik feladatot az összes pályázó között a legjobban oldotta meg, és szabatos fogalmazásával fegyelmezett gondolkodást árult el. A második feladattal azonban nem foglalkozott."

A főreáliskola matematikai köre számára feladatokból álló *pályatételt* tűzött ki. A pályázat eredménye és a pályatétel feladatai megjelentek a Középiskolai Matematikai Lapok 1913. januári, illetve 1914. februári számában (1359–1361., 2376–2381. feladatok).

„Lapunk ez idei (1913) januári számában közöltük azokat a verseny feladatokat, amiket az V. k. áll. Főreáliskolában Obláth Rikárd tanár úr kitűzött. Most pedig a verseny eredményéről akarunk beszámolni.

A versenyzők közül leginkább kiválnak *Kornfeld*[9] (V. o.t.), Goldstein (VIII. o.t.) és Oszwald (VIII. o.t.) dolgozatai úgy eredeti felfogásukkal, mint a bizonyítások tömörségével és szabatosságával. Ügyességet és bő ismereteket árultak el Lovas, és Benkő dolgozatai, de a többiek is megbecsülésre érdemes munkát végeztek."

Obláth Richárd az első világháborút megelőző időszakban aktív tudományos matematikai, ismeretterjesztő, illetve pedagógiai munkásságot fejtett ki. *Ő írta a Tolnai Világlexikon matematikai szövegeit!* Ezek a szövegek egyrészt matematikai definíciók, tételek, másrészt matematikusok életrajzai voltak. Innen datálódnak az 1950–1960-as években a *Matematikai Lapokban,* a *Középiskolai Matematikai Lapokban* és *A Matematika Tanításában* megjelent matematikatörténeti cikkei. Megfigyelhető, hogy ezek a cikkek nagyon sok területen érintkeznek, más-más közönség számára dolgozzák fel ugyanazt a témát. Sőt hozzáteszem, hogy személyes tapasztalatai és matematikai érdeklődése is befolyásolta ebben, mert pl. az V. kerületi Állami Főreáliskolához köze volt *Beke Manónak, Kürschák Józsefnek* és *Geőcze Zoárdnak.* A Gaál Mózes által alapított X. kerületi tisztviselőtelepi gimnáziumban[10] Dienes Pállal tanított együtt. Rados Gusztáv tanára volt az egyetemen.

[5] Oláh Gyula cikkének adatai hibásak.

[6] Makoldy Viktor nevét egyes esetekben Makoldy Győzőnek írták.

[7] Budapest, Markó u. 18–20.

[8] Geőcze Zoárddal szorosabb kapcsolatban volt. Erre utal egyrészt az, hogy, mint tanárok követték egymást, másrészt más apróbb momentumok, pl. Geőcze katonaként meglátogatta Versecen Obláthot.

[9] Korodi Albert.

[10] Budapest, Szabóky utca.

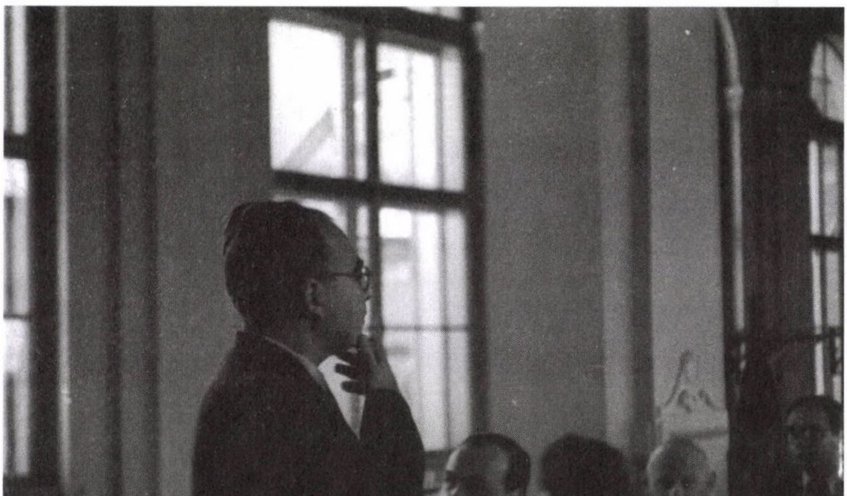
A Tolnai Világlexikona szerkesztői és munkatársai

Középiskolai tanárként külföldi, német és francia nyelvű lapokba (Zeitschrift für Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterricht, Mathesis) küldött be feladatmegoldásokat, és tűzött ki feladatokat.

Az első világháború idején katonai szolgálatot teljesített, póttartalékos altiszt volt. Katonai segédszolgálatra tartották alkalmasnak, és így hol tanított, hol nem. 1916/17-es tanévben tanított a budapesti X. kerületi tisztviselőtelepi gimnáziumban. Az 1917/18-as tanévben csak a második félévben tanított. 1919-ben a Lászlóféle magángimnázium[11] vezetőtanára volt. Az 1919-es proletárdiktatúra bukása után politikai okokból elvesztette tanári állását. Egy ideig magánbiztosítási társaságnál dolgozott. 1922–1946 között a Magyar Általános Kőszénbánya Részvénytársaságnál volt matematikus.

1946-ban nyugdíjazták. Nyugdíjasként, egészen haláláig, a budapesti Tudományegyetemen volt megbízott előadó. Számelméleti és matematikatörténeti kurzusokat tartott.

Jó és kedélyes előadó volt, egyénisége szerény és megnyerő. Élvezetesen és világosan magyarázott. Alapelve az volt, hogy *a tanár mosolyogjon*, mert így tud bizalmat kelteni maga és a tanított tárgya iránt. Tanítványai között találjuk Deák Ervint és Pálmay Lórántot. Deák Ervin elmondta, hogy a vizsgán Obláth sokszor a hallgatóra bízta a vizsgán kifejtendő téma kiválasztását: „azt mondja el, amit szeretne”.



Szeged, 1957. Balról jobbra: Rényi Alfréd, Varga Ottó, Obláth Richárd, Gyires Béla

Érdeklődött mások problémái iránt. Udvarias, figyelmes és kötelességtudó volt. Óráit mindig megtartotta, még akkor is, ha egyetlen hallgató vett rajta részt. Foglalkozott a matematika széles körű népszerűsítésével. Sok ismeretterjesztő cikket

[11]Budapest, Hold u. 19.

írt, előadásokat tartott a TIT-ben, a Magyar Rádióban, a József Attila Szabadegyetemen.

1955. június 15-i dátummal a Tudományos Minősítő Bizottság, addigi munkájának az elismeréseként, rövidített eljárásban, *kandidátusi fokozatot* adományozott számára. Ezután az MTA többször is felkérte bírálóbizottsági tagnak, több dolgozatot véleményezett. A Matematikai és Fizikai Társulatban, majd 1951-től a Bolyai János Matematikai Társulatban volt választmányi tag. Aktív szerepet vállalt a Társulat második világháború utáni újjászervezésében. Az *Első Magyar Matematikai Kongresszus*on a *Gyökmennyiségek aritmetikai sajátságairól* tartott előadást 1950. augusztus 28-án. Az 1948–1956 közötti időszakban sok előadást tartott a BJMT budapesti tagozatának rendezvényein, főképpen számelméleti és matematikatörténeti kutatásairól. Ezek a témák a későbbiekben cikk formájában is megjelentek: pl. A prímszámok számának megbecsléséről (1948), Aktuális diofantikus problémák (1951), Megemlékezés Vályi Gyuláról (1955), Megemlékezés Gaussról (1956).

Tudományos munkássága

Tudományos munkásságának több területe volt:

- *Geometriai szerkesztések elmélete;*
- *Elemi számelmélet, diofantikus egyenletek;*
- *Matematikatörténet;*
- *Biztosítási matematika;*
- *Pedagógia, szakmódszertan, tehetséggondozás.*

Több mint 80 publikációja jelent meg. Egy dolgozatát posztumusz közölték. Fő munkája az **„Analízis és geometria alkalmazásai"** (Budapest, 1920) című könyve, amely a címben említett két területen kívül, a XXI. fejezetben matematikatörténetet tárgyal, illetve mind az *Előszó,* mind a *Hogyan tanuljunk?* című rész erősen didaktikai jellegű.

Külön fogunk foglalkozni a DE Matematikai Intézetének Könyvtárában levő kézírásos *Számelméleti feladatok fordítása* című munkájával.

Geometriai szerkesztések elmélete

Hilbert a geométerek Bibliájának nevezett, *A geometria alapjairól* (Grundlagen der Geometrie, 1899) című könyvében foglalkozott az euklideszi geometria axiomatikus felépítésével. Az euklideszi geometria axiómáit öt csoportra osztotta. Megvizsgálta, hogy melyek azok az euklideszi geometriai szerkesztések, amelyek megoldásához a vonalzón kívül csak hosszátvivő, vagyis olyan eszköz kell, amely tetszés szerinti szakaszoknak egy egyenesről tetszés szerinti másik egyenesre való átrakását teszi lehetővé.

Kürschák kimutatta, hogy a folytonossági axiómát nem igénylő, vagyis az ún. diszkrét szerkesztésekben a hosszátvivő egy alapmértékkel (egységgel) pótolható, vagyis elegendő az egyenes vonalzó mellett olyan merev körzőt használni, amely csak egy megszabott alapmérték áthelyezésére alkalmas (egységátrakó körző, etalon).

Ma Kürschák eredménye, nevének említésével és a dolgozat ábrájának közlésével megtalálható minden geometriai axiómákkal foglalkozó könyvben.

Obláth Richárd a *Merőleges szerkesztése egy egyenes adott pontjában vonalzóval és étalonnal* című első dolgozatában foglalkozott a geometriai szerkesztések elméletével. A *Kürschák-féle szakaszátrakó etalont* használva, az addig ismert eljárásokhoz képest egyszerűbb megoldást mutatott be merőleges egyenes szerkesztésére egy egyenes adott pontjában. Elemi eszközökkel kimutatta, hogy az etalonnal történő szerkesztések végrehajtásához elegendő a Steiner-féle kör bármilyen kicsi íve is, ha a kör középpontja ismert.

Szőkefalvi-Nagy Gyula: A geometriai szerkesztések elmélete című könyvében[12] hivatkozott Obláth eredményeire, és bebizonyította, hogy *Obláth módszerével minden másodfokú szerkesztés elvégezhető.* Obláth a későbbiekben tovább élesítette eredményeit, és igazolta, hogy bármely kör tetszőleges kicsiny ívének és az ívharmadoló pontok ismeretében minden kvadratikus szerkesztés csak vonalzó segítségével végrehajtható.

Foglalkozott a harmadfokú és a negyedfokú szerkesztések elméletével is. Megmutatta, hogy minden harmad- vagy negyedfokú szerkesztés megoldható egy mozgatható derékszöggel, ha ugyanazon a szögszáron ki van jelölve egy pont és egy meghatározott szakasz felezőpontja. A szerkesztések elméletében elért eredményeire *L. Bieberbach: Theorie der geometrischen Konstruktionen*[13] című könyve is hivatkozik.

A Matematikai Lapokban[14] ismertette *Bauer Mihály*nak a geometriai szerkesztésekre vonatkozó tételét. Logikus kérdésfelvetés volt az, hogy nem lehetne-e az etalonnal történő szerkesztéseknél a Steiner-kört valamilyen egyszerűbb ábrával pótolni.

Kürschák József tette fel azt a másik kérdést, hogy nem lehetne-e az etalont valamely sokszög megadásával pótolni, hiszen a szerkesztéseink nem igénylik a folytonossági axiómákat. A tagadó választ *Bauer Mihály* adta meg, bebizonyítva a következő tételt:

A mozgatható etalon nem pótolható semmilyen sokszöggel.

Bauer bizonyítása Kőnig Gyulának egy szokatlan terminológiájú tételén alapult. *Obláth* ebben a cikkben egy algebrai bizonyítást adott meg. Véleménye szerint: „Nem fölösleges azért, ha igen egyszerű bizonyítást adok Bauer tételére, melynek alapgondolata egyébként lényegileg azonos Bauer bizonyításával."

---

[12]Szőkefalvi-Nagy Gyula: *A geometriai szerkesztések elmélete,* Akadémiai Kiadó (Budapest, 1968).

[13]Bieberbach, L.: *Theorie der geometrischen Konstruktionen* (Basel, 1952), 4. §.

[14]Bauer Mihály tétele a geometriai szerkesztésekről, *Matematikai Lapok,* **IV** (1953), 2–3. szám, 108–112.

Bárány Imre a *Discrete and Convex Geometry*[15] című tanulmányában kiemeli, hogy Obláth Richárd is és Szőkefalvi-Nagy Gyula is Kürschák eredményét fejlesztette tovább.

Számelmélet

Obláth Richárd munkásságának nagyobb része számelméleti vonatkozású, és ma is sokat hivatkoznak egyes cikkeire[16], sőt 2003-ban *On Obláth's problem* címmel jelent meg cikk a *Journal of Integer Sequences,* Vol. 6 (2003) folyóiratban A. Gica és L. Panaitopol tollából, amelyben az *Une propriété des puissances parfaites* (*Mathesis,* **65** (1956), 356–364.) cikkben felvetett probléma további kérdéseivel foglalkoztak.

Az *Erdős Pállal* közös cikkre (Über diophantische Gleichungen der Form $n! = x^p \pm y^p$ und $n! \pm m! = x^p$, *Acta Sci. Math. Univ. Szeged,* **8** (1937), 241–255) Omar Kihel és Florian Luca hivatkoztak a *Variants of the Brocard–Ramanujan equation* (Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, **20** no. (2008), 353–363.) cikkükben.

Legtöbbet idézett számelméleti cikkei:

- Über das Produkt fünf einender folgender Zahlen in einer arithmetischen Reihe, *Publicationes Mathematicae,* **1** (1950), 222–226.
- Eine Bemerkung über Produkte aufeinander folgender Zahlen, *Journal of the Indian Math. Soc. Memorial,* Volume **XV** (1951), 135–139.
- Über diophantische Gleichungen der Form $n! = x^p \pm y^p$ und $n! \pm m! = x^p$ (Erdős Pállal közösen) *Acta Sci. Math. Univ. Szeged,* **8** (1937), 241–255.
- Über die Verteilung der Primzahlen, *Tôhoku Mathematical Journal (Sendai, Japan),* **32** (1930), 328–331.
- Untere Schranken für Lösungen der Fermatsche Gleichung, *Portugaliae Mathematica,* **11** (1952), 129–132.
- *Une propriété des puissances parfaites Mathesis,* **65** (1956), 356–364.
- Une équation diophantinne de M. Segre, *Bulletin de la Societé Royale des Sciences de Liège,* **20** (1951), 199–204, 378.

Obláth vizsgálta a prímszámok eloszlását. Tételét *Bauer Mihály* és *Szegő Gábor* megjegyzéseinek a felhasználásával tovább általánosította.

Erdős Pálnak a binomiális együtthatókra vonatkozó sejtését teljes negyedik és ötödik hatvány esetére bizonyította be. Több dolgozatában foglalkozott azzal a régi

[15] Bárány, I.: *A Panorama of the Hungarian Mathematics in the Twentieth Century I.*, Springer (2006), 428.

[16] Tijdeman (1989), Győry Kálmán (1996, 1997), Florian Luca (2002), G. Grossman és Florian Luca (2002), Alexandru Gica és Laurentiu Panaitopol (2003, Mathesis 65), Győry Kálmán, Hajdu Lajos és N. Saradha (2004), Tengely Szabolcs (2007), M. Mignotte, Yann Bugeaud (Mathesis 65), Richard K. Guy: *Unsolved Problems in Number Theory,* 274, 419, 219, 220. oldalain hivatkozik cikkekre, Omar Kihel és Florian Luca (2008).

híres sejtéssel, hogy egymást követő egész számok szorzata sohasem lehet teljes hatvány. *Szekeres György* ötletére támaszkodva bebizonyította, egymást követő egész számok szorzata sohasem lehet teljes hatvány, ha ezen számok között van olyan, ami az összes többi számhoz relatív prím. Obláthnak Szekeres György módszerének a felhasználásával azt sikerült kimutatnia, hogy legfeljebb 17 egymást követő egész szám szorzata nem lehet teljes hatvány, vagyis az $x(x+1)\cdots(x+k-1)=y^n$ diofantikus egyenlet $k \leq 17$, $n > 1$ és $y \neq 0$ esetben megoldhatatlan.

Ennek a témának a folytatása annak a kérdésnek a tárgyalása volt, hogy: „Lehet-e egy számtani sor(ozat) egymásra következő tagjainak szorzata teljes hatvány?".

Fermat, Euler és Lebesgue tudta, hogy négy tag szorzata nem lehet teljes négyzet. A *Megjegyzés a számtani sorról*[17] című cikkében bebizonyította, hogy ha egy számtani sorozat kezdőtagja és különbsége relatív prím, akkor három egymásra következő tagjának a szorzata nem lehet sem köb, sem negyedik, sem ötödik hatvány.

Sokat foglalkozott a számtani sorozat öt egymás után következő tagjának a szorzatával pl. abban az esetben, amikor a sorozat tagjai racionális egész számok. Bebizonyította, hogy ha egy számtani sorozat kezdőtagja és különbsége relatív prím, akkor öt egymásra következő tagjának a szorzata nem lehet teljes négyzet. Ma ez a legtöbbet idézett cikke.

Az *Erdős Pállal* közös cikkét[18] is sokszor idézik. Ebben a dolgozatban a következő diofantikus egyenleteket vizsgálták:

$$n! = x^p \pm y^p, \tag{1}$$

$$n! \pm m! = x^p. \tag{2}$$

Az (1) egyenlet esetében bebizonyították, hogy a $2! = 1 + 1$-en kívül nincs olyan faktoriális szám, amely két relatív prímszám p-edik hatványának összege vagy különbségeként lehetne felbontani, ha $p \geq 3$ és p nem hatványa 2-nek.

Eredményesen vizsgálták a $p = 2^\alpha$ esetet, ha $\alpha \geq 3$. A $p = 4$ esetre azt igazolták, hogy elég nagy n-re $n!$ nem bontható fel két relatív prímszám negyedik hatványának különbségeként. A $p = 2$ esetben csak egy megoldás van: $6! = 12^2 + 24^2$.

A (2) egyenlet esetében azt kapták, hogy ha $n > m > 1$, $p > 1$, akkor ez a diofantikus egyenlet nagy számokra megoldhatatlan, tehát csak véges számú megoldása van. Az ismert megoldások: $2! + 2! = 2^2$, $3! + 2! = 2^3$, $5! + 4! = 12^2$, $3! - 2! = 2^2$. Megállapításuk szerint valószínűleg más megoldások nem léteznek

B. Segre foglalkozott az $y^2 = 3x(x^2 + x + 1)$ diofantikus egyenlet megoldásával. Kimutatta, hogy az $x = 0$ és $x = 1$ triviális esetektől eltekintve ennek a diofantikus egyenletnek nincs megoldása a racionális számok között.

Obláth az oszthatóság felhasználásával adott erre a tételre egy egyszerű bizonyítást, illetve Nagell egy tételének az alkalmazásával általánosította az

$$y^n = 3x(x^2 + x + 1) \quad \text{és az} \quad y^n = \frac{1}{3}x(x^2 + x + 1)$$

[17]Megjegyzés a számtani sorról, *Matematikai Lapok,* **1** (1950), 138–139.

[18]Über diophantische Gleichungen der Form $n! = x^p \pm y^p$ und $n! \pm m! = x^p$ (Erdős Pállal közösen), *Acta Sci. Math. Univ. Szeged,* **8** (1937), 241–255.

diofantikus egyenletekre. A racionális megoldások lehetetlenségét visszavezette olyan diofantikus egyenletek megoldásának lehetetlenségére, amelyet Siegel a *descente infinie* módszer segítségével bizonyított be.

Obláth még sok dolgozatában foglalkozott diofantikus egyenletek megoldhatatlanságának vizsgálatával, egyes esetekben a triviális megoldásoktól eltekintve speciális esetekben mutatta ki a megoldhatatlanságot, más esetekben pedig általánosan oldotta meg a problémát. Foglalkozott az $x^2 - 1 = y^m$, $x^m + 1 = y^n$, $x^3 - 1 = 2y^n$, $3x^2 \pm 1 = z^3$ alakú diofantikus egyenletekkel.

A Matematikai Lapokban található az *Egy Fermat-féle bizonyítás helyreállításának kísérlete* című cikke[19], ami egyrészt történeti, másrészt matematikai jellegű. Gyökerei világosan látszanak. Témája egyrészt Obláth számelméleti vizsgálataival kapcsolatos, másrészt kiváló német- és franciatudásán alapuló matematikatörténeti érdeklődésén alapult. Lényegében a kis Fermat-tétel bizonyításának rekonstruálásával foglalkozott benne. Jellemezte Fermat munkásságát, utalt a helyreállítási kísérlet forrásaira, a *Frénicle*-lel való levelezésére, Frénicle 1657-ben megjelent *Solutio* című munkája *Supplementj*ére, valamint elemezte Hughensnek a leydeni egyetem könyvtárában őrzött *Relation des nouvelles découvertes en la science des nombres de Fermat* (Fermat új számelméleti felfedezéseinek megoldása) kézzel írt, keltezés nélküli kéziratát.

Számelméleti feladatok fordítása[20]

Obláthnak egy igen érdekes kézirata található a DE Matematikai Intézetének Könyvtárában, *Számelméleti feladatok fordítása* címmel. A kézirat keletkezésének időpontja nem ismert. A DE Matematikai Intézete könyvtárába 1966-ban került. Obláth különféle számelméleti cikkeket fordított le, és azokat kommentárokkal vagy saját bizonyításokkal látta el.

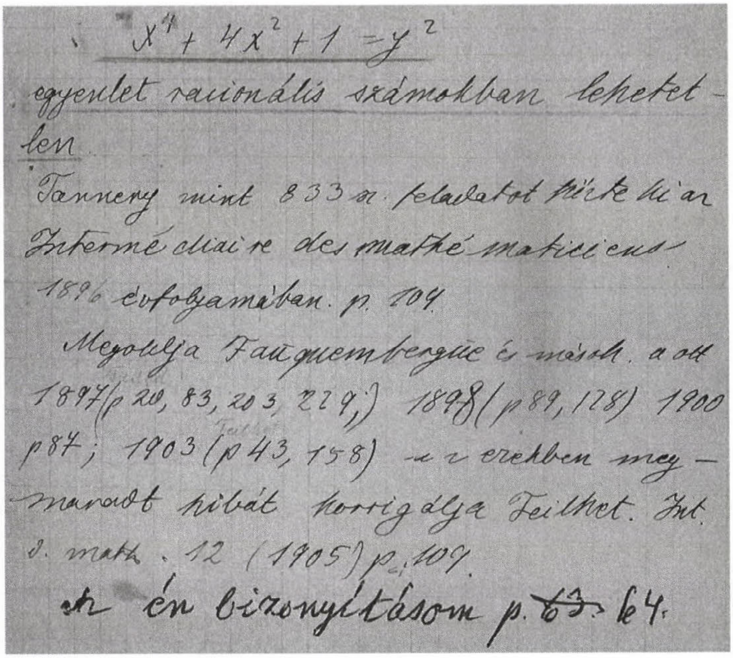
A barnás–vöröses kemény kötésű kockás füzet 162 számozott lapból áll, amelyek közül 155 lapra van írva. Két helyen találunk dátumot: a 65. oldalon „Budapest 1918. november 26-án Teilheit megjegyzi. . . ” és az utolsó fordításnál a 155. oldalon: „Kiírtam Tryggve Nagell cikkét *The Tôhoku Mathematical Journal* 24. kötetéből (1925).”

A fordítások témái elsősorban diofantikus egyenletek, a prímszámok tulajdonságai és az egymás után következő egész számok szorzatának vizsgálata.

A lefordított cikkek néha igen régiek, a 19. század második felében jelentek meg. Egy részük a Nouv. Ann. de Math első évfolyamaiból való, de találunk Euler-cikket is.

[19]Egy Fermat-féle bizonyítás helyreállításának kísérlete, *Matematikai Lapok,* **3** (1952), 4–5. szám, 18–30.

[20]*Számelméleti feladatok fordítása,* kézirat, DE Matematika Intézet Könyvtára, 1966, leltári szám: 5149.



$x^4 + 4x^2 + 1 = y^2$

egyenlet racionális számokban lehetet-
len.

Tannery mint 833 sz. feladatot tűzte ki az
Intermédiaire des mathématiciens
1896 évfolyamában. p. 104.

Megoldja Fauquembergue és mások a ott
1897 (p 20, 83, 203, 229;) 1898 (p 89, 128) 1900
p 87; 1903 (p 43, 158) – az ezekben meg-
maradt hibát korrigálja Feilket. Int.
d. math. 12 (1905) p. 109.

Az én bizonyításom p. ~~63.~~ 64.

A lefordított cikkek:

- Lebesgue cikke: *Az* $x^m = y^2 + 1$ *egyenlet lehetetlenségéről,* Nouv. Ann. de Math. Serie (1), 9. kötet (1850), 178 (szó szerinti fordításban).
- Lucas értekezése: *Az* $x^3 + y^3 = az^3$ *egyenlet egész számú megoldásairól,* Nouv. Ann. de Math. Serie (2), 17. kötet, 425
- Genocchi cikke: *A* $2y^2 - 1 = x$ *és* $2z^2 - 1 = x^2$ *Fermat-féle egyenletrendszer megoldása,* Nouv. Ann. de Math. Serie (3), 2. kötet (1883), 306.
- *Fauquembergue cikke:* Az egység kivételével egyetlen köbszám sem állítható elő, mint két egymásután következő szám négyzetének összege. Nouv. Ann. de Math. Serie (3) 2. kötet (1883) 430
- Réalis cikke: *Az* $x^3 + k = y^2$ *határozatlan egyenlet egész számú megoldásairól,* Nouv. Ann. de Math. Serie (3), 2. kötet (1883), 289.
- Réalis: *1451. feladat,* Nouv. Ann. de Math. Serie (3), 2. kötet (1883), 333.
- Réalis cikke: *Az* $x^2 + nxy - ny^2 = 1$ *határozatlan egyenlet megoldása,* Nouv. Ann. de Math. Serie (3), 2. kötet (1883), 494.
- Benoit cikke: *Az irracionális kifejezések aritmetikai sajátosságairól,* Nouv. Ann. de Math. Serie (1), 9. kötet, (1850) 145.

Megjegyzés: Ez a fordítás számomra nagyon érdekes volt, mert a következő állítást és a bizonyítását tartalmazta:

A $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ *számok sem számtani, sem mértani progresszióban nincsenek.*

A feladat nagyon ismerős volt. Egy változata több feladatgyűjteményben is megtalálható, mert vele analóg feladatot tűztek ki az *1977. évi matematika közös érettségi és felvételi feladatsorban:*

Lehetnek-e $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ *egy számtani sorozat elemei?*

- Euler cikke: *Racionális középvonalú háromszögek,* Comm. Arith. Coll. II. 294, 362, 488 (1778, 1779, 1782).
- 802. feladat: *Ha* $p = 18n + 5$, $q = 18n + 11$ *alakú prímszám, akkor a következő számok* p, $2p$, $4p^2$, q^2, $2q^2$, $4q$ *nem bonthatók fel két köb összegére,* Nouv. Ann. de Math. Serie (2), 6. kötet, 96 és Nouv. Ann. de Math. Serie (2), 17. kötet, 508.
- Meyl cikke: *Az* $\binom{n+2}{3}$ *pyramidális szám csak úgy lehet teljes négyzet ha* $n = 1, 2, 48$, Nouv. Ann. de Math. Serie (2), 17. kötet 464, Question 1194.
- Réalis cikke: $6xy(3x^4 + y^4)$ *nem lehet teljes köb, sem négyszerese teljes köb,* Nouv. Ann. de Math. Serie (2), 17. kötet, 468, Question 1251.
- Gegenbauer cikke: *Három prímszám két tulajdonsága,* Sitzungsberichte d. Math.-Naturw. Klasse der K. Akademie d. Wissenschaften, 97 Band (1888), 271–275.
- Gegenbauer cikke: *Binér formákról, melyek nem ábrázolhatnak prímszám-hatványokat,* Sitzungsberichte d. Math.-Naturw. Klasse der K. Akademie d. Wissenschaften, 97 Band (1888), 368.
- Tannery feladata: *Az* $x^4 + 4x^2 + 1 = y^2$ *egyenlet racionális számokban lehetetlen,* Intermédiaire des mathématiciens (1896), 104.

  Megjegyzés: Erre a feladatra saját megoldást közölt Obláth.
- Hill, G. W. cikke: *Hat egymásután következő szám szorzata nem lehet teljes négyzet,* Mathematical Monthly I. 29.
- *Az* $n(n + 1)(n + 2) = m(m + 1)(2m + 1)$ *egyenlet egész számokban lehetetlen.*
- Catalan problémája: *Két egymás után következő egész szám* 8 *és* 9 *kivételével nem lehet teljes hatvány,* Nouv. Ann. de Math (1), 520 (842). Bizonyítás nélkül.[21]
- Barinen kérdése: *Egymás után következő számok köbeinek összege mikor lesz maga is teljes köb?* Intermédiare des mathematiciens, **15.** kötet (1908), 3354. kérdés.
- Carl Störmer cikke: $m \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + n \operatorname{arctg} \frac{1}{y} = k\frac{\pi}{4}$ *egész számokban lehetetlen,* Bulletin de la Société Mathématique de France, **27** (1899), 160–170.
- Nagell cikke: *Sur l'equation indeterminée* $\frac{x^n-1}{x-1} = y^2$, Norsk Matematisk Forenings Skrifter, Serie I. Nr. 3 (1921), Kristiana.
- *Nagell cikke*: Sur l' impossibilité de quelques équations a deux indeterminées. Norsk Matematisk Forenings Skrifter, Serie I. Nr. 13 65-82
- *Az* $a^{2n} - 1 = 2b^n$ *egyenlet egyetlen egész számú megoldása a triviális* $a = 1$, $b = 0$.

[21] A. Gloden hivatkozott cikkében (*Mathesis,* **61** (1952), 302–303.) arra, hogy a 20. században T. Nagell (Uppsala) és Obláth Richárd foglalkozott a Catalan-problémával. Sierpinski megemlítette, hogy Obláth az $\frac{1}{n}$ alakú törteket primer törteknek nevezte.

A Mathesis folyóiratban kifejtett számelméleti munkásságáról

Úgy látszik, hogy ezek a fordítások erősen kapcsolódnak számelméleti vizsgálataihoz, későbbi cikkeihez, különösen a Mathesis (francia nyelvű) folyóiratba beküldött feladat megoldásaihoz, kommentárjaihoz, cikkeihez, illetve kitűzött kérdéseihez. Nagyon sok feladatmegoldása, feladatkitűzése, megjegyzése és rövid cikke jelent meg a Mathesisben.

Question 3489.

(Voir *Mathesis*, 1950-360).

Trouver trois nombres entiers de même parité consécutifs dont la somme est double d'un carré et le produit triple d'un carré.

(V. Thébault)

Solution par MM. R. Obláth et M. Delcoúrte. Si $n-2$, n, $n+2$ sont les nombres cherchés, on doit avoir les relations

$$3n = 2a^2, \quad n(n^2-4) = 3b^2$$

dont la première prouve que

$$n = 2m,$$

de sorte qu'elles s'écrivent

$$3m = a^2, \quad 8m(m^2-1) = 3b^2.$$

Cette dernière égalité exige pour b la forme

$$b = 4b'$$

et s'écrit donc

$$m(m^2-1) = 6b'^2 \quad \text{ou} \quad \binom{m+1}{3} = b'^2.$$

On sait (Meyl, NA, 1878-464, *question* **1194**) que les seules solutions de cette équation sont $m = 1, 2, 3, 49$. Pour avoir en même temps $3m = a^2$, il faut $m = 3$, et les nombres demandés sont 4, 6, 8.

Lehetőségem az 1950 és 1960 közti kötetek átnézésére volt. Azt tapasztaltam, hogy e téren az Obláth Richárd dolgozatainak a Matematikai Lapokban (**10** (1959), 19–25) megjelent jegyzéke igen hiányos. Valóban nagyon nehéz utánakeresni az egyes cikkeknek, illetve hivatkozásoknak, mert az idézett folyóiratok egyes számai Magyarországon nehezen vagy egyáltalán nem hozzáférhetőek[22]. Viszont nagyon sok információt lehet szerezni Obláth cikkeinek a lábjegyzeteiből a saját munkásságára vonatkozólag.

[22]Ezúttal mondok köszönetet Yann Bugeaud strassburgi matematika professzornak, aki elküldte számomra a Mathesis 1959. évi kötetében megjelent Obláthról szóló nekrológot.

Bemutatunk egy Obláth által kitűzött feladatot:

Question **3525** *Mathesis* **61** (1952), 355: Mutassuk ki, hogy az $x^3 + y^3 = z^3$ diofantikus egyenlet lehetetlen az olyan egészekre, amelyek nem oszthatók 3-mal, 7-tel vagy 13-mal.

A *Mathesis,* **68** (1959) évi számában (p. 253–254.) egy *rövid nekrológot* találunk Obláthról. Munkásságából kiemelték a harmadfokú szerkesztésre vonatkozó eredményét, a Segre diofantikus egyenletére adott bizonyítását és az Erdős Pállal közös cikkét. A Mathesisben való együttműködésért a folyóirat vezetősége és az olvasók nevében hajtottak fejet előtte.

Analízis és geometria alkalmazásai című könyvéről

Ez a könyv elsősorban műegyetemi hallgatók számára készült, számukra foglalta össze a felsőbb matematikát.

„Arra szorítkoztam, ami valóban szükséges" – emelte ki az Előszóban. A legszükségesebb, a műegyetemi hallgatók számára kötelezően előírt bizonyításokat közölte, a gyakorlati alkalmazásokra fektette a hangsúlyt.

A könyv fejezetei:

I. A függvény és a határérték fogalma.

II. A differenciálhányados és alkalmazása.

III. Többváltozós függvények.

IV. Integrálok. Végtelen sorok.

V. Térgörbék és felületek.

VI. Komplex számok és függvényeik.

Közelítő módszerek

A matematika történetének vázlata

A matematika történetének vázlata a 160–164. paragrafusokban található.

Címszavai:

160.§. Néhány szó az ókori mathematikáról.

161.§. A renaissance mathematika.

162.§. A tizenhetedik század (projektív geometria, analitykai geometria analízis).

163.§. A tizennyolcadik század.

164.§. A tizenkilencedik század (elemi geometria, projektív geometria, algebra, infinitézimális analízis).

Megállapíthatjuk, hogy *a 20. században Obláth Richárd a matematikatörténet felsőoktatásba való bevezetésének egyik első szószólója volt Magyarországon.*

A *matematikatörténeti áttekintés*t a következőképpen indokolta:

„A történeti áttekintés felvétele alig szorul mentegetődzésre. Manapság már eléggé átérzi mindenki a tudománytörténeti fejlődésének fontosságát. Elmondhatjuk, hogy kialakulásának ismerete minden, az exakt tudományok alkalmazásával foglalkozó ember általános műveltségéhez tartozik, s a magyar olvasónak mathematikatörténet még egyáltalán nem áll a rendelkezésére. A mai papír- és nyomdaárak mellett ez az áttekintés persze csak igen töredékes lehet." A történeti áttekintést élvezetes, olvasmányos résznek tartotta.

A könyvben tárgyalt témakörökhöz kapcsolódtak a bemutatott, híres tudósok: Euclides, Apollonius, Pappus, Archimedes, Diophantos, Hypatia, Tartaglia, Cardan, Ferrari, Regiomontanus, Napier, Briggs, Pascal, Galilei, Bachet, Désargues, Leibniz, Fermat, Gregory, Newton, Mercator, Cavalieri, Guldin, Barrow, Hughens, Bernoulliak, Lagrange, Rolle, L'Hospital, Taylor, Mac Laurin, Cotes, Taine, Châtelet, Parent, Clairaut, Meusnier, Hamilton, D'Alembert, Legendre, Monge, Laplace, Simson, Mascheroni, Steiner, Gauss, Staudt, Euler, Feuerbach, Carnot, Poncelet, Brianchon, Gergonne, Hesse, Plücker, Abel, Galois, Cauchy, Bolzano, Fourier, Poisson, Lejeune Dirichlet, Riemann, Weierstrass, *Einstein,* Dedekind, G. Cantor, Hilbert, *Riesz Frigyes,* Cesaro, Hadamard, Lebesgue, *Fejér Lipót, Geőcze Zoárd*[23].

Pedagógiai jellegűek a *„Hogyan tanuljunk?"* és az *„Útbaigazítás a továbbtanulásra"* című részek.

„Hogyan tanuljunk?" című rész minden szava hangsúlyos és megszívlelendő az egyénileg tanuló felnőtt diák számára.

„Aki tehát gyengének tudja magát az elemi mennyiségtanban, mindenekelőtt ezt a mulasztását igyekezzék pótolni, mert e nélkül a szaktanulmányaira fordított minden fáradsága falra hányt borsó. A ház építését az alapokon kezdik, nem az emeleten, már pedig a teljes elemi matematika minden műszaki ember mindennapi kenyere.

A könyvből való mathematika tanulásnál állandóan legyen előttünk papírlap, amelyen minden egyes levezetést ceruzával követünk, az esetleg átugrott részleteket néha utána számítjuk. Ha valamely lépést esetleg nem értünk meg teljesen, akkor ne folytassuk az olvasást, hanem igyekezzünk magunknak számot adni az okoskodás jogosultságáról. Ha ez sehogy sem sikerülne, tovább mehetünk ugyan, de térjünk vissza mindaddig rá, míg megtaláljuk a dolog nagyon egyszerű nyitját. A szöveg ugyanis csak a legelemibb lépéseket nem magyarázza külön. A magyarázat sokszor valamely régebben tanult tételre hivatkozik.

Az ábrát ugyan vegyük elő, de magunk is elkészítjük mindig a szöveg utasítása szerint. Az előforduló görbéket rajzoljuk meg gondosan. Technikustól precíz munkát várunk."

„Útbaigazítás a továbbtanulásra" című részben az igényesebb hallgatók számára ajánlott német és francia nyelvű irodalmat. „Bármily könyv olvasása azonban csak akkor lehet igazán eredményes, ha rendszeresen végig tanulmányozzuk."

[23]Euler, Gauss, Dirichlet, Geőcze, Fermat munkásságát a későbbi matematikatörténeti cikkeiben tárgyalta. Meglepő, hogy néhány magyar kortársának a nevét is felsorolta: Riesz Frigyes, Fejér Lipót, Geőcze Zoárd.

Matematikatörténet, ismeretterjesztés

Obláth matematikai, illetve matematikatörténeti szócikkeit először a *Tolnai Világlexikonba* írta. Ennek első nyolc kötete, A-tól E(ke)-ig, jelent meg 1908 és 1919 között. Az első világháború idején megszakadt a sorozat, és csak később indult meg újra. Ennek az új sorozatnak a szerzői között már nem szerepel Obláth Richárd neve, pedig egyes matematikai szócikkek szóról-szóra azonosak a régi és az új sorozatban.

A Tolnai Világlexikon a *Bevezető*ben bemutatta munkatársait beosztásukkal együtt. Megállapították, hogy a Lexikon „szerkesztőit és munkatársait a legkiválóbb tudósai és írói sorából válogattuk össze. Minden munkatársunk csakis a saját szakmájába vágó fogalmakat és tárgyakat dolgozza fel."

A 11. oldalon megtaláljuk a szerkesztők és munkatársak fényképeit, így Obláth Richárd tanárét is. A szerzők névsorát a kötetek végén mindig közreadták.

Obláth feladata kétirányú volt: egyrészt matematikai definíciók, tételek leírása, másrészt matematikusok munkásságának az ismertetése.

Az *Analízis és geometria alkalmazásai* című könyve XXI. fejezetének lábjegyzetében utalt arra, hogy „A matematikusok életrajzának elbeszélésébe nem bocsátkozunk. Az érdeklődők rövid felvilágosítást nyerhetnek a Tolnai Világlexikon megfelelő cikkeiből."

Matematikai definíciók

A matematikai definíciók megfogalmazása a 20. század eleji terminológiát tükrözi. Néhányat bemutatunk közülük.

- **Abszolút érték,** a szám értéke, előjelétől függetlenül. A szám névértékének is mondhatjuk. Pl. úgy a $+4$-nek, mint a -4-nek abszolút értéke egyaránt 4. Az a szám abszolút értékének a jele $[a]$. Az abszolút értéket régebben a szám normájának hívták.
- **Abszolút geometria.** A mértan összes tételét néhány egyszerű igazságból vezetik le. Ezek az axiómák (alapigazságok) és posztulátumok (követelések). A mértannak ezeken alapuló tudományos rendszerét *Euklides* (l.o.) ógörög matematikus állította fel az ő híres „Elemei"-ben. Már az ókorban is, de azután is sokan kifogásolták, hogy azt a tételt, hogy valamely egyeneshez egy ponton át csak egyetlen párhuzamosat húzhatunk, az alapigazságok közé helyezte. Azt hitték ugyanis, hogy ezt az igazságot a többi axiómával és posztulátummal be lehet bizonyítani. De az összes megkísérelt bizonyítások hibásak voltak, mert a párhuzamosoknak ezt az axiómáját a sorok között egy másik, vele egyenértékű, posztulátummal pótolták. Kétezer esztendei sikertelen küszködés után az 1820-as években Bolyai János (l.o.) hazánkfiának és az orosz Lobacsevszkijnak (l.o.) az a merész gondoltuk támadt, hogy a párhuzamosak axiómája független a többi alapigazságtól. Ezt úgy mutatták meg, hogy az axióma helyett egy vele ellenkező posztulátumot vettek fel, s a helyett, hogy ellentmondásra bukkantak volna, egy önmagában teljesen következetes rendszert találtak. Ezt a maga

alkotta „ujj, más világot" nevezte Bolyai abszolút geometriának, Erre a gondolatra többen már előbb is rájutottak, s a legtöbb eredményt Gauss (l.o.) érte el. Bolyai felfedezését később mások lényegesen kiegészítették. A kritika nem érte be a párhuzamosok axiómájának a vizsgálatával, hanem minden axiómát megvizsgált, hogy vajon nem pótolható egy vele ellenkező követeléssel. Ha az így nyert rendszer nem tartalmaz ellentmondást, akkor a vizsgált alapigazság valóban független a többi alapigazságtól, azaz maga is alapigazság. Az ilyen általános irányú geometriai kutatások nagymesterei *Hilbert* és *Veronese.* A sok abszolút geometria közül a Bolyai-félén kívül a legismeretesebb a *Riemanné* (l.o.), aki szerint a tér nem végtelen kiterjedésű, hanem csak határtalan.

- **Egyenközény,** rossz magyarságú neve a *paralelogrammának.* Egyenközény az a négyszög, melynek átellenes oldalai párhuzamosak. Legfontosabb sajátsága, hogy az átellenes oldalai egyszersmind egyenlők, úgyszintén szemben fekvő szögei is. Bármelyik átlója két összeillő háromszögre bontja. A két átló felezi egymást stb. Ha az egyenközény valamelyik szöge derékszög, akkor téglalapnak hívjuk.

- **Egyenlőtlenség,** a matematikában, annak kijelentése, hogy két mennyiség nem egyenlő. Jele: $\neq$, vagyis az egyenlőség jele áthúzva. Ha azt is kijelöljük, hogy melyik mennyiség nagyobb, akkor a $>$, $<$ jeleket használjuk; $a > b$ így olvasandó: a nagyobb, mint b; az $a < b$ így olvasandó: a kisebb, mint b.

- **Dodekaéder** (görög) 12 szabályos ötszöggel határolt test, 30 éle, 20 csúcsa van. A dodekaéder az öt szabályos test egyike, tehát a csúcsai mind összeillők, s a dodekaéder ugyanazt az alakot mutatja, bármelyik lapjára is fektetjük.

(A szócikk melletti ábrán megtaláljuk a dodekaéder axonometrikus képét és hálóját.)

Matematikusok munkásságának az ismertetése

A matematikatörténeti szócikkekben tárgyalt matematikusok közül a Tolnai Világlexikon első sorozatának 1–8. kötetében azokról találhatunk szövegeket, akik nevének kezdőbetűje ***A*** és ***E***(ke) között van, így pl. Beke Manó, Bogyó Samu, Bolyai Farkas, Bolyai János, Désargues, Descartes stb.

A szócikkek és definíciók egymásra épülnek, egymásra utalnak. Ennek illusztrálására a Bolyai Farkasról és Bolyai Jánosról szóló szócikket idézzük. Ezekben a szócikkekben az életrajzi adatok mellett a matematikai és nem matematikai eredményeket is felsorolta. Itt még a Bolyai Jánost övező legendákat, pl. a párbajhős, is megtaláljuk. Ezen a téren az újabb kutatások eredményeként sokat változtak a nézetek.

Később a *Képek a magyar matematika múltjából VII. részében foglalkozott Bolyai Farkassal* (Középiskolai Matematikai Lapok, **14** (1957), 1. szám, 1–2). Ez a későbbi cikk egyes elemeiben azonos a Tolnai Lexikon cikkével, de tudományosabb jellegű, mert megemlíti a Bolyai Farkas-féle átdarabolási tételt, illetve azt, hogy Bolyai Farkas a függvény fogalmára milyen modern értelmezést adott.

„Bolyai,

1. *Bolyai Farkas*, magyar matematikus, született 1775. febr. 9-én Bólyán, meghalt 1856. nov. 20-án Marosvásárhelyen. Apja *bólyai Bolyai Gáspár* bólyai földbirtokos, a régi Felső-Fehér vármegye bólyai járásának szolgabírája volt. Anyja *pávai Vajna Krisztina*. Erdélyi református középiskolákon s a jénai és göttingeni egyetemeken tanult. Göttingenben barátságot kötött az ugyancsak ott tanuló *Gauss*-szal (l.o.), akinek hatalmas lángelméjét Bolyai Farkas már akkor felismerte. Meg is mondta Gauss édesanyjának, hogy a fiából a világ legnagyobb matematikusa lesz. Bolyai Farkas hazajövetele után mindhalálig levelezetek egymással. Levelezésüket 1899-ben adta ki a Magyar Tudományos Akadémia. Bolyai Farkast 1804-ben meghívták a marosvásárhelyi református kollégium tanárának, s itt 47 évig tanított.

Bolyai Farkas elsőrangú matematikus, akinek a geometria alapjaira vonatkozó éles elméjű kutatásai maradandó értékűek. Ő a modern geometriai felfogás egyik megteremtője. Az egyenesre és a síkra adott meghatározásai ma általánosan elfogadottak. Életének nagy tragikuma a párhuzamosak problémája. Világosan látta a feladatot, de akármint fáradozott, nem tudta *Euclides* (l.o.) tárgyalását jobbal pótolni. Elkeseredésében egy ideig abbahagyta matematikai tanulmányait, s technikai találmányokkal (fűtő- és főző kemence stb.), meg szépirodalommal foglalkozott. *II. Mohamed* és *Pausanias* című drámái irodalomtörténeti nevezetességűek. Ez utóbbi a magyar irodalom legelső terméke, amelyben nemzetközi és szocialista eszméket találunk. Bőbeszédűsége és virágos stílusa miatt azonban munkái igen nehezen olvashatók. Főművét, az 1832-ben megjelent *Tentament* a Tudományos Akadémia igen díszesen adta ki újra 1897-ben.

2. Bolyai János, *Farkas* fia, ez ideig a legzseniálisabb magyar matematikus. Született Kolozsvárott 1802. dec. 15-én, meghalt 1860. január 17-én Marosvásárhelyen. Bolyai János valóságos csodagyerek volt, bámulatosan könnyen tanult. A matematikára édesapja tanította, de már 15 éves korában a bécsi katonai műszaki akadémiára került, amelynek elvégzése után a hadseregbe lépett. Itt csak hamar fölvitte a kapitányságig. Mint életírója írja. „a hadsereg első matematikusa, első hegedűse és első vívója". Egy alkalommal 13 párbajt vívott sorjában egymásután, de azzal a feltétellel, hogy mindegyik párbaj után eljátszhat egy darabot a hegedűjén. Valamennyi ellenfelét legyőzte. 1833-ban saját kívánságára nyugdíjazták, de megengedték neki, hogy amikor akar, visszatérhet. Ekkor atyjához ment, akivel azonban sokat viszálykodott. 1834-től 1846-ig a domáldi birtokukon gazdálkodott. Majd haláláig zárkózottan Marosvásárhelyen élt.

Élete nagy műve az *abszolút geometria* (l.o.) megteremtése volt, amely egy formailag és tartalmilag egyaránt klasszikus 29 oldalas kis latin dolgozatban jelent meg (*Appendix* stb.) 1832-ben, mint apja *Tentamen*-jének függeléke. Bolyai János ebben megmutatta, hogy a régi ismert geometrián kívül más, önmagukban teljesen következetes geometriai rendszerek is lehetségesek. Ezekben *Euclidesnek* (l.o.) a párhuzamosokról szóló axiómáját egy másik föltevés helyettesíti. Ezzel betetőzte apja élete munkáját, egyszersmind bebizonyította, hogy az a számtalan kísérlet, amelyekkel kétezer év alatt oly sokan próbálták meg az euclidesi axióma bebizonyítását, mind hiábavaló volt. Bolyai János föltételezésére vele majdnem egy idejűleg és tőle függetlenül Lobacsevszkij (l.o.) orosz matematikus is rájött, de a tudományos világban életükben egyiknek sem volt sikere. Annál nagyobb a dicsőségük ma. Az *Appendix*-et jóformán minden művelt nyelvre lefordították. Bolyai János kézirатainak átvizsgálása alkalmával kitűnt, hogy Bolyai János falusi magányában kortársai munkásságának ismerete nélkül számos fölfedezésre önállóan rájött. Születésének századik évfordulóját nagy fénnyel ünnepelte meg a kolozsvári egyetem, és szülőházát emléktáblával jelölték meg."

A második világháború után matematikatörténeti cikkeit elsősorban a Matematikai Lapokban, a Középiskolai Matematikai Lapokban és A Matematika Tanításában közölte.

A *Képek a magyar matematika múltjából* sorozat I–VIII. része a Középiskolai Matematikai Lapokban jelent meg 1953 és 1957 között, és a következő témákat tárgyalta: *Az úttörők, Geőcze Zoárd, Kürschák József, Arany Dániel, Beke Manó, Vályi Gyula, Bolyai Farkas, Rados Gusztáv.*

Az úttörők között elsőként említette *Sipos Pált,* akinek matematikai eredményei (Sipos-féle görbe) a kor színvonalán álltak. De szó esik Regiomontanusról, Magyarországi György mesterről, a Debreceni arithmetikáról, Rhäticusról, Comeniusról, Apáczai Csere Jánosról, a debreceni Kollégium tanárairól: Maróthi Györgyről, Hatvani Istvánról és Kerekes Ferencről Az utóbbi a komplex számokról írt munkájával, a Bolyaiak előtt nyerte meg a lipcsei tudóstársaság pályadíját. Eztán a nagyszombati, majd a pesti egyetem matematikatanárai következnek: Mitterpacher József, Kerekgedei Makó Pál, a jezsuita tankönyvírók, Hadaly Károly, Dugonics András, Pasquich János és végül Teleki József és Sámuel, illetve Martinovics Ignác.

Külön cikkekben foglalkozott a nem magyar matematikusok közül *Carl Friedrich Gauss, Peter Gustav Lejeune-Dirichlet és Euler munkásságával.*

Írt a *Középiskolai Matematikai Lapok és a matematikai versenyek múltjáról* és *A fiatal matematikusokról.* Érdemes felsorolni azoknak a matematikusoknak a nevét, akik ez utóbbi cikkben szerepelnek, illetve összevetni a neveket az *Analízis és geometria alkalmazásai* című könyv matematikatörténeti részében tárgyalt tudósokéval: Mohamed Ibn Musa Alkvarizmi, Scipio del Ferrone, *Cardano, Ferrari, Descartes, Fermat, Desargues, Pascal, Clairaut, Lagrange, Gauss, Brianchon, Abel, Peter Gustav Lejeune-Dirichlet,* Bolyai János, Bolyai Farkas, Lobacsevszkij, *Galois,* Hermite, Laguerre, Minkowski, *Fejér Lipót,* Szuszlin, Uriszon, Neumann János, Kolmogorov, Snyirelman, Hajós György, Erdős Pál, Ádám István, Schweitzer Miklós, Safarevics[24].

A Matematika Tanításában megjelent cikkeinek egy másik szempont volt a vezérfonala: a *tudós kutató középiskolai tanárok.* Itt is dőlt betűkkel jelezzük az ismétlődő neveket: *Lebesgue, Riesz Frigyes, Bolyai Farkas, Sipos Pál,* Scholtz Ágoston, Farkas Gyula, Klug Lipót, *Geőcze Zoárd,* Vörös Cyrill, *Goldziher Károly,* Dienes Pál, Pál Gyula, Fekete Mihály, *Szőkefalvi-Nagy Gyula,* Török Elemér, Rédei László, Turán Pál, Alexits György, Kárteszi Ferenc, Moór Artur.

[24]Dőlt betűvel írtuk azoknak a matematikusoknak a nevét, akiknek munkássága Obláth több cikkében is megtalálható.

Beke Manó, Arany Dániel és *Kürschák József* a külön kiemelt nagy tanárok.

Szót ejtett a két legelső magyar matematikai doktornőről, *Tedeschi Borbála* és *Molnár Evelyn* tanárnőkről.

A Matematikai Lapokban jelentek meg *Szőkefalvi-Nagy Gyula matematikai munkássága* és *Vályi Gyula* (1855. január 25 – 1913. október 13) című cikkei, illetve *Gaussról* egy megemlékezés.

Könyvismertetést találunk *Ligeti Béla: A magyar matematika története a XVIII. század végéig* és *Szénássy Barna: Vázlatok a magyar matematika újkori történetéből* című könyveiről.

Véleménye: „Mindkét füzet nyeresége matematikatörténeti irodalmunknak és a legmelegebben ajánlható. Az olvasónak igaz gyönyörűsége telik bennük."

Halála után jelent meg a *Demográfia* 1961. 1–2. számában a *Goldziher Károly munkásságának demográfiai vonatkozásai* című cikke, azzal a megjegyzéssel, hogy „A Közlemény a nemrégen elhúnyt Obláth Richárd professzor Goldziher Károlyról írt dolgozatának rövidített változata."

Pedagógiai, szakmódszertani, tehetséggondozó munkássága

Az alkoholizmus élettani és ethikai hatásai címen az ungvári katolikus Főgimnázium Értesítőjébe (1906/07) írt cikket. Ez a cikke több változatban is megjelent, pl. *Az alkoholizmus ellen* című folyóirat 1908. novemberi és júniusi számaiban folytatásban, különlenyomatban a 2. kiadás Kolozsváron 1909-ben, a 3. lenyomat a *Magyar Tanítójelölt* 1909. január és június közötti számaiban.

Érdemes kitérni a cikk gondolatainak ismertetésére, mert az ott felvetett problémák ma, a 21. században még aktuálisabbak és égetőbbek. Egy iskolai kirándulás tapasztalatai alapján állította, hogy „a gyermek is minden ünneplés kiegészítő részének tekinti az ivást". A gyermek látja, hallja, hogy a felnőttek minden elképzelhető alkalommal isznak, az italt nagyon megbecsülik, jónak tartják.

Azt tartotta, hogy „meg kell mondani az ifjúságnak, hogy az alkohol a legkisebb mértékben is méreg". Szerinte az iskola egymaga kevésre megy az alkohol elleni küzdelemben, ha a szülői ház nem támogatja. Csak a gyenge, az ingatag, jellemtelen ember folytatja az ivást, ha megismerte annak káros hatását. A gyógyszertanok az ideg és agymérgek (bódító szerek) között szokták az alkoholt sorolni, mert az alkohol erős kémiai hatást gyakorol az agysejtekre. Szerinte az alkoholt, mint izgató szert is használják, mert a fáradtság szubjektív érzését egy rövid időre megszünteti, igaz, hogy a visszahatás annál nagyobb lesz. Érdekes az a kitétele, hogy az alkohol gyengíti a szervezet ellenálló képességét.

Befejezésként azt kérte:

„Szülők! Óvjátok meg az első pohártól gyermeketeket!"

„A matematika tanításáról a VII. osztályban" címmel a Gyakorlati Paedagógiába (Szeged, 1907) írt cikket. Ebben kifejtette, hogy a középiskolai tanuló még nem

érett ember (a tehetségesebbje sem!), tehát szellemi szükségletei mások. A logikai szigorúság iránt nincs érzéke, tényeket akar tudni, lassan érik meg kritikai érzéke.

A matematikatanítás módszereivel és a tehetséggondozással kapcsolatosak az önképzőkör a matematikai osztályának munkájáról írt beszámolói az ungvári kir. Kat. Főgimnázium 1906–1909. évi értesítőiben. Nézetei mai szemmel is igen modernek: függvényközpontúság, a geometria és az aritmetika, mint hálás téma a felfedeztető tanításhoz, fokozatosság, motiváció, önálló munka. „Hisz az önálló produktív alkotás a legmagasabb szellemi munka és a legnemesebb intellektuális tevékenység." – írta.

Megállapította, hogy a matematika a legszélesebb népszerűtlenségnek és ismeretlenségnek örvend. „*Az iskola feladata ennek az óriási közönynek és a matematika iránt táplált ellenszenvnek az eloszlatása.* Ennek a feladatnak nagy része természetesen a mindennapi rendes tanítás körébe esik, amely hivatásának majd csak a függvénytani szempontok nagyobb figyelembe vételével felelhet meg teljesen."

A matematikai kör arra alkalmas, hogy az ifjúság legjavának ne csak az érdeklődését keltsük fel, hanem arra, hogy megszerettessük velük a matematikát, felkeltsük bennük a tudományok iránti érzéket, az önálló munkálkodáshoz kell anyagot nyújtani.

„Én azonban a tanulók intenzív munkásságát akartam igénybe venni! Arra törekedtem, hogy tanítványaimat sok és sokoldalú matematikai tényre vezessem rá, úgy azonban, hogy az *egyenes közlés a minimumra szálljon alá,* ezért többnyire arra szorítkoztam, hogy megjelöljem, milyen természetű igazsághoz, s körülbelül milyen úton kell eljutnunk.

Korántsem akarok én a fiúkból matematikusokat nevelni, sőt! Elég, ha megismerték az állítólag száraz, unalmas matematika szépségét, és megismerték a szellemi munka gyönyörűségeit. Bizonyos, hogy később is vissza-visszatérnek hozzá!"

Fő céljuk a Középiskolai Matematikai Lapok feladatainak megoldása és beküldése volt. Ezt kétféleképpen tették: egyrészt, mint matematikai kör, másrészt egyes tanulók egyénileg. Nevüket megtaláljuk a Középiskolai Matematikai Lapok 1907–1909. évi számaiban.

Viszont ez az a pont, ahol Obláth Richárd matematikatanári munkája és az alkoholizmus elleni küzdelme egybekapcsolódik: „Az ilyen tanulómat nem féltem azután, sem a cimboráktól, sem a kártyától, sem az alkoholizmustól. Mert megtanulhatta a kincset, amelynek legnagyobb hasznát veszi az életben: a világnak nyugodt, higgadt, elfogulatlan szemlélését s a tudományos gondolkodás alapjait. S minderre a matematikával való intenzív foglalkozás szoktatta rá."

Obláth Richárd a Félix Klein, illetve Beke Manó által kijelölt matematikatanítási reform elkötelezett híve volt. Az elméleti viták letisztulása után a gyakorlatban is áttértek a megvalósítás útjára, az elsők között vezették be különórában, tanfolyamon a differenciál- és integrálszámítás tanítását.

„Az új irányra való áttérésre, aggályaim ellenére, az bírt rá, hogy a matematikai kör bizonyos mértékben alkalmasnak látszott a *pedagógiai laboratórium* szerepének a betöltésére, mert itt a legjobb tanulókon próbálhatjuk ki, vajon eredményesen lehet-e tanítani a függvénytan elemeit a középiskolában, s nem okoznak-e a tanulóknak túl nagy nehézséget. Valamint itt is *kialakulhat a középiskolába újonnan felveendő anyag didaktikája* is."

„*Mindig arra törekedtem, hogy mennél gyakorlatibb legyek,* hogy tehát az érdeklődést mindig biztosítsam, azért a nyert eredményeket felhasználtam az iskolában izoláltnak látszó anyag koncentrálására, valamint a fizikában tanult hosszadalmas bizonyítások rövid és elegáns elvégzésére.

Mindig megelégedtem a legegyszerűbb, ha nem is a legprecízebb szemléleti bizonyítással. Ezen a fokon nézetem szerint nem lehet másnak helye, mert sem a gyermek, sem a tárggyal először foglalkozó laikus nem érzi másnak szükségességét. A tárgyalást mindig konkrétté tettem, azért a legtöbb tételt speciális függvényeken mutattam be, hogy ezzel is hasznos szolgálatot tegyek a középiskolai oktatás ügyének."

Feladatkitűzések és megoldások magyar nyelvű folyóiratokban

Szerette a matematikai feladatokat, problémákat. Magyar nyelven a Matematikai Lapok és a Középiskolai Matematikai Lapok hasábjain találkozunk nevével, mint feladatkitűzővel. Néhányat bemutatunk belőlük. Megállapítható, hogy ezeknek a feladatoknak a témája is kapcsolódott aktuális tudományos munkáinak témáihoz: a geometriához, a számelmélethez, a gyakorlati élethez, a biztosítási matematikához.

254. feladat (Középiskolai Matematikai Lapok (1950), II. kötet, 4. szám). A-ban és B-ben egy-egy ugyanazon cikket gyártó üzem dolgozik. Mely helyeken versenyképes mindenik gyár, ha

a) Munkamódszereiket egymásnak kölcsönösen átadták és általában a munkafeltételek mindkét üzemben azonosnak tekinthetők, és így az áru előállítási költsége mindkét helyen azonos, de a különböző terepviszonyok folytán a szállítási költség különböző, mégpedig az egység szállítási költsége A-ból kilométerenként c_1 fillér, B-ből kilométerenként c_2 fillér;

b) A termelési önköltség a két üzemben különböző (pl. azért, mert a gyárak kapacitása más), de a szállítási költség mindkét helyen azonos;

c) Ha mind a termelési önköltség, mind a szállítási egységár mind a két helyen azonos.

357. feladat (Középiskolai Matematikai Lapok (1951), 3. kötet, 3. szám). Mutassuk meg, hogy két egymásra következő szám szorzata nem lehet teljes hatvány!

358. feladat (Középiskolai Matematikai Lapok (1951), 3. kötet, 3. szám). Mutassuk meg, hogy három egymásra következő szám szorzata nem lehet teljes hatvány!

450. feladat (Középiskolai Matematikai Lapok (1953), IV. kötet, 4–5. szám). Bizonyítsuk be, hogy ha α hegyes szöget jelöl, akkor $\sin\alpha + \cos\alpha \leq \sqrt{2}$. Az adott egyenlőtlenség a lehető legjobb.

647. feladat (Középiskolai Matematikai Lapok (1954), IX. kötet, 5. szám). Az $ABCD$ négyszögben a $B\sphericalangle = D\sphericalangle = 90°$. Az A csúcsnál levő szög legyen α. Bizonyítandó, hogy $BD = AC\sin\alpha$.

449. gyakorlat (Középiskolai Matematikai Lapok (1957), XV. kötet, 3–4. szám).
Bizonyítsuk be, hogy sem $\frac{n(n-1)}{2}$, sem n^2 (ahol n természetes szám) nem lehet $3k-1$ alakú.

Obláth Richárd publikációinak jegyzéke

Tudományos munkái

[1] Merőleges szerkesztése egy egyenes adott pontjában vonalzóval és étalonnal, *Math. és. Phys. Lapok,* **18** (1909), 174–176.

[2] Bemerkungen zur Theorie der geometrischen Konstruktionen, *Monathshefte für Mathematik und Physik,* **26** (1915), 295–298.

[3] Quadratische Reste und Nichtreste. Lösung einer Aufgabe, *Archiv der Mathematik und Physik,* **3.** Reihe, Band **23** (1914/15), 187–188.

[4] Számelméleti tételek, *Mathematikai és Physikai Lapok,* **27** (1918), 91–94.

[5] Az $x^3 + k = y^2$ határozatlan egyenletről, *Szent István Akadémia Értesítője,* **3** (1918), 172–180.

[6] *Az analízis és a geometria alkalmazásai* (Budapest, 1920), xvi + 240.

[7] A prímszámok eloszlásáról, *Mathematikai és Természettudományi Értesítő,* **47** (1930), 250–253.

[8] Über die Verteilung der Primzahlen, *Tôhoku Mathematical Journal (Sendai, Japan),* **32** (1930), 328–331.

[9] Über Produkte aufeinander folgenden Zahlen, *Tôhoku Mathematical Journal (Sendai, Japan), Memorial Volume,* Vol. **38** (1933), 73–92.

[10] Sur la théorie des constructions cubiques, *Comptes Rendus,* **197** (1933), 1383–1385.

[11] Zur Theorie der Konstruktionen dritten grades Zahlen, *Tôhoku Mathematical Journal (Sendai, Japan), Memorial Volume,* Vol. **39** (1934), 1–5.

[12] Egymásra következő számközök prímszámairól, *Matematikai és Fizikai Lapok,* **41** (1934), 41–44.

[13] Congruences with binomial coefficients, *Proceedings of the Indian Academy of Sciences,* Vol. **1** (1934), 383–386.

[14] Über einen arithmetischen Satz von Kürschák, *Commentarii Mathematici Helvetici,* **8** (1935/1936), 186–187.

[15] Über Primzahlen in aufeinander folgenden Intervallen, *Annali di matematica pura ed applicata,* serie **IV**. Tomo **XIV** (1935/1936), 299–303.

[16] Über eine diophantische Gleichung, *Wyadonoczny Matematyczne (Warsawa)*, **42** (1936), 127–128.

[17] Über diophantische Gleichungen der Form $n! = x^p \pm y^p$ und $n! \pm m! = x^p$ (Erdős Pállal közösen), *Acta Sci. Math. Univ. Szeged*, **8** (1937), 241–255.

[18] Die rechte Winkel und die kubischen Konstruktionen, *Zeitschrift für Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterricht*, **68** (1937), 301–306.

[19] Über die Zahl $x^2 - 1$, *Mathematica B.* (holland), **8** (1939/1940), 161–172.

[20] Az $x^2 - 1$ számokról, *Matematikai és Fizikai Lapok*, **47** (1940), 58–76, helyreigazítás u.ott, 180.

[21] Sobre equationes diofanticas imposibles de la forma $x^m + 1 = y^n$, *Revista Matemática Hispano Americana*, **4** serie, tomo **1**, 22–141.

[22] Sobre los prodottos dos numeros consecutivos, *Revista Matemática Hispano Americana*, **4** serie, tomo **2** (1942), 190–210, 253–270.

[23] Une proposition sur le quadrangles, *Mathesis*, **54** (1942), 351.

[24] Note on the binomial Coefficients, *Journal of the London Mathematical Society*, Vol. **23** (1948), 252–253.

[25] Megjegyzés a számtani sorról, Matematikai Lapok **1** (1950) 138-139.

[26] Über das Produkt fünf einender folgender Zahlen in einer arithmetischen Reihe, *Publicationes Mathematicae*, **1** (1950), 222–226.

[27] Sur l'équation diophantinne $\frac{4}{n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$, *Mathesis*, **59** (1950), 308–316.

[28] Über die diophantische Gleichung $x^3 - 1 = 2y^2$, *Acta Mathematica Academiae Sci. Hung.*, **I.** (1950), 113–116, 321–322.

[29] Une équation diophantinne de M. Segre, *Bulletin de la Societé Royale des Sciences de Liège*, **20** (1951), 199–204, 378.

[30] Ein Beitrag zur Theorie der geometrischen Konstruktionen, *Acta Sci. Math. Szeged* (1951), 81–82.

[31] Eine Bemerkung über Produkte aufeinander folgender Zahlen, *Journal of the Indian Math. Soc. Memorial Volume*, **XV** (1951), 135–139.

[32] Gyökmennyiségek aritmetikai tulajdonságairól, *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei, Különlenyomat*, Akadémai Kiadó (Budapest, 1951), 445–450.

[33] Adalékok a geometriai szerkesztések elméletéhez, *Matematikai Lapok*, **2** (1951), 219–222.

[34] Une remarque sur les fomules de recurrence, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **II** (1951), 303–309.

[35] *Über die Integrationskonstante Elemente der Mathematik* (Basel–Zürich), **VII** (1952), 37–38.

[36] Über einige unmögliche diophantische Gleichungen, *Tidsskrift for Mathematik* (1952), 53–62.

[37] Egy Fermat-féle bizonyítás helyreállításának kísérlete, *Matematikai Lapok*, **3** (1952), 4–5. szám, 18–30.

[38] Untere Schranken für Lösungen der Fermatsche Gleichung, *Portugaliae Mathematica*, **11** (1952), 129–132.

[39] Sur le problèm de Goldbach, *Mathesis,* **61** (1952), 179–183.

[40] Bauer Mihály tétele a geometriai szerkesztésekről, *Matematikai Lapok,* **IV** (1953), 2–3. szám, 108–112.

[41] Une propriété des puissances parfaites, *Mathesis,* **65** (1956), 356–364.

[42] *Számelméleti feladatok fordítása,* kézirat, DE Matematika Intézet Könyvtára (1966), leltári szám: 5149.

Feladatkitűzések francia és német nyelvű külföldi folyóiratokban

[43] Aufgabe 453 ($2^{\alpha-1} \pm 1 = \xi^n$ diofantikus egyenlet megoldása lehetetlen), *Math. Zeitschrift für Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterricht,* **45** (1914), 294.

[44] Question proposée no. 3056. Une proposition sur le quadrilatere, *Mathesis,* **51** (1937), 492.

[45] Zwei zahlentheoretische Sätze (Aufgaben No. 258 und 259), *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinung,* **47** (1937), 64.

[46] Deux notes sur quelques équations diophantiennes, *Mathesis,* **60** (1951), 307–308, 333–336.

[47] Une note sur l'equation de Pell-Fermat, *Mathesis,* **61** (1952), 58.

[48] Question proposée no. 3564, *Mathesis,* **61** (1952), 232.

[49] Question proposée no. 3525, *Mathesis,* **61** (1952), 341.

[50] Question proposée no. 3564, *Mathesis,* **62** (1953), 267.

[51] Question proposée no. 3606, *Mathesis,* **62** (1953), 279.

[52] Note sur Question proposée no. 3573, *Mathesis,* **63** (1954), 65.

[53] Note sur Question proposée no.1651, Mathesis **63** (1954) 143.

Matematikatörténet

[54] Matematikai és matematikatörténeti cikkek a Tolnai Világlexikonban (1909–1914).

[55] A Középiskolai Matematikai Lapok és a versenyek múltjáról, *Középiskolai Matematikai Lapok,* **2** (1950), 3–7.

[56] Képek a magyar matematika múltjából I. Az úttörők, *Középiskolai Matematikai Lapok,* **6** (1953), 65–69.

[57] Képek a magyar matematika múltjából II. Geőcze Zoárd (1873–1916), *Középiskolai Matematikai Lapok,* **8** (1954), 1. szám, 1–5.

[58] Képek a magyar matematika múltjából III. Kürschák József (1864–1933), *Középiskolai Matematikai Lapok,* **8** (1954), 4. szám, 97–104.

[59] Képek a magyar matematika múltjából IV. Arany Dániel (1863–1944), *Középiskolai Matematikai Lapok,* **9** (1954), 3–4. szám, 65-71.

[60] Szőkefalvi-Nagy Gyula matematikai munkássága, *Matematikai Lapok,* **5** (1954), 189–243.

[61] Ligeti Béla: A magyar matematika története a XVIII. század végéig és Szénássy Barna: Vázlatok a magyar matematika újkori történetéből (Könyvismertetés), *Matematikai Lapok,* **5** (1954), 185–188.

[62] Képek a magyar matematika múltjából V. Beke Manó, *Középiskolai Matematikai Lapok,* **10** (1955), 2. szám, 33–42.

[63] Tudós kutató középiskolai tanárok, *A Matematika Tanítása II.* (1955), 5. szám, 147–149.

[64] Tudós kutató középiskolai tanárok (2. közlemény), *A Matematika Tanítása II.* (1955), 6. szám, 177–182.

[65] Carl Friedrich Gauss (1777. április 30 – 1855. február 23), *Középiskolai Matematikai Lapok,* **10** (1955), 4. szám, 97–99.

[66] Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805–1859), *Középiskolai Matematikai Lapok,* **11** (1955), 3–4. szám, 65–67.

[67] Megemlékezés Gauss halálának 100-ik évfordulóján, *Matematikai Lapok,* **6** (1955), 221–240.

[68] Vályi Gyula (1955. január 25 – 1913. október 13), *Matematikai Lapok,* **7** (1956), 1–2. szám, 61–70.

[69] Beke Manó, a nagy magyar tanár (1862–1945), *A Matematika Tanítása II.* (1956), 5. szám, 147–151.

[70] Képek a magyar matematika múltjából VI. Vályi Gyula (1855–1913), *Középiskolai Matematikai Lapok,* **12** (1956), 1. szám, 1–8.

[71] Képek a magyar matematika múltjából VII. Bolyai Farkas, *Középiskolai Matematikai Lapok,* **14** (1957), 1. szám, 1–2.

[72] Képek a magyar matematika múltjából VIII. Rados Gusztáv (1862. február 22 – 1942. november 1), 1. rész, *Középiskolai Matematikai Lapok,* **14** (1957), 2. szám, 33–38.

[73] Képek a magyar matematika múltjából VIII. Rados Gusztáv (1862. február 22 – 1942. november 1), 2. rész, *Középiskolai Matematikai Lapok,* **14** (1957), 3. szám, 60–70.

[74] Euler, *Középiskolai Matematikai Lapok,* **15** (1957), 3–4. szám, 65–75.

[75] Goldziher Károly munkásságának demográfiai vonatkozásai, *Demográfia* (1961), 1–2. szám, 253–255.

Biztosítási matematika

[76] Az egyszeri díjas életbiztosítások tartaléka, *Biztosítási és Közgazdasági Lapok* (1921. március 15).

[77] A valutáris biztosításokról, *Biztosítási és Közgazdasági Lapok* (1923. március 15).

[78] A díjvisszatérítésről a nyugdíjbiztosításban, *Biztosítási és Közgazdasági Lapok* (1931. május 15).

[79] A munkaidőről – munkaadói szempontból, *Munkaügyi Szemle,* **12** (1938) 511–516.

Pedagógia, szakmódszertan, tehetséggondozás

[80] Az alkoholizmus élettani és ethikai hatásai, *Ungvári Katolikus Főgimnázium Értesítője* (1906/07).

[81] Az alkoholizmus élettani és ethikai hatásai, *Az alkoholizmus ellen* 1908. novemberi és júniusi számaiban folytatásba.

[82] *Az alkoholizmus élettani és ethikai hatásai,* Különlenyomat, 2. kiadás (Kolozsvár, 1909).

[83] Az alkoholizmus élettani és ethikai hatásai, 3. lenyomat a *Magyar Tanítójelölt* 1909. január és június közötti számaiban.

[84] A matematika tanításáról a VII. osztályban, *Gyakorlati Paedagógia* (1907), III. 339–359, Szeged.

[85] Feladatkitűzések a *Matematikai Lapokban* és a *Középiskolai Matematikai Lapokban.*

Irodalom

[1] Bieberbach. L.: *Theorie der geometrischen Konstruktionen* (Basel, 1952).

[2] Gulyás Pál – Viczián János: Magyar írók élete és munkái, *Új sorozat,* XIX. kötet (Budapest, 1995).

[3] Győri E., Katona Gy. O. H., Lovász, L. (ed): More Sets, Graphs and Numbers, Springer, *Bolyai Society Mathematical Studies,* **15** (2006).

[4] Nagykanizsai kegyesrendi Gimnázium Értesítői, 1891–1900.

[5] Ungvári m. kir. Gimnázium Értesítői, 1900–1910.

[6] Kántor Sándorné: Délvidékről származó magyar matematikusok, *Új Kép (Vajdasági Módszertani Központ, Szabadka),* X. évfolyam, 8–9. szám (2006. október–november), 24–43.

[7] Kántor Sándorné: *Tudós matematikatanárok Hajdú-Bihar, Szabolcs–Szatmár és Szolnok megyében* (1850–1948), 2. bővített és javított kiadás (2009). MEK.

[8] *Középiskolai Matematikai Lapok.*

[9] *Matematikai Lapok.*

[10] *Matematika Tanítása.*

[11] *Mathesis* (Basel–Zürich) folyóirat számai (1952–1960).

[12] Oláh Gyula: Obláth Richárd, *Matematikai Lapok,* **10** (1959), 19–25.

[13] Obláth Richárd dolgozatainak jegyzéke *Matematikai Lapok,* **10** (1959), 192–194.

[14] Petrik Géza: *Magyar könyvészet* (1921/23).

[15] *Publicationes Mathematicae, Debrecen* (1950).

[16] Radnai Gyula: Obláth Richárd, *História Tudósnaptár* (2009). (`www.kfki.hu/physics/historia`)[25].

[17] Szőkefalvi-Nagy Gyula: *A geometriai szerkesztések elmélete* (Kolozsvár, 1943).

[18] Szőkefalvi-Nagy Gyula: *A geometriai szerkesztések elmélete,* Akadémiai Kiadó (Budapest, 1968).

[19] *Tolnai Világlexikon,* 1–8. kötet.

[20] *Zsidó Lexikon*[26].

[25] Radnai Gyula: Obláth Richárd (História–Tudósnaptár 2009) cikkében sok adat téves.

[26] A Zsidó Lexikon adatai sem felelnek meg a valóságnak sok esetben.

Sándorné Kántor: Richárd Obláth (Versec (now Vrsac, Serbia), June 11, 1882 – Budapest, June 18, 1959)

Obláth, Richárd studied at the University of Budapest and obtained his mathematics–physics teacher's diploma in 1905. He taught at secondary schools in several towns between 1905 and 1919. After of the Soviet Republic (1919) he lost his job. He worked at first in insurance from 1922 to 1945 as a mathematician of the General Mining Company. From 1946 he was a lecturer at the University of Budapest. In 1955 he obtained the title of Candidate. He was active in the organization of the Bolyai Society and gave lectures popularizing mathematics.

Areas of interest: geometric constructions, elementary number theory, actuarial mathematics and history of mathematics[27].

Dr. Kántor Sándorné
DE Matematikai Intézet
tkantor@math.klte.hu

[27] Kántor, T.: *Biographies, A Panorama of the Hungarian Mathematics in the Twentieth Century I.*, Springer (2006) (ed.: J. Horváth).

TÁRSULATI ÉLET – 2010

Szele Tibor-emlékérem

A Bolyai János Matematikai Társulat Szele Tibor-emlékérem bizottsága a 2010. évi érmet **Tóth Bálint**nak, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Matematika Intézetének egyetemi tanára számára ítélte oda.

Szakmai karrier: Tóth Bálint 1955-ben született Kolozsvárott. 1980-ban fizikusi levelet szerzett a Bukaresti Egyetemen, 1981 óta Magyarországon él. 1982 és 1989 között az MTA Matematikai Kutatóintézetében dolgozott. Szász Domokos témavezetése mellett itt szerzett matematikus PhD-t 1988-ban. 1989-től 1991-ig az edinburghi Heriot–Watt Egyetemen volt vendégkutató és előadó, majd 1998-ig ismét a Matematikai Kutatóintézet munkatársa lett. 1998-ban került a BME Matematika Intézetének sztochasztika tanszékére, majd annak vezetője lett. 1999-ben szerezte meg az MTA doktori címet. 2005-től 2009-ig a BME Matematika Intézet igazgatói posztját is betöltötte. Számos alkalommal dolgozott rövidebb vendégkutatói pozíciókban a világ legrangosabb intézeteiben. 2009 óta az *Electronic Journal of Probability* című folyóirat főszerkesztője. 5 éven keresztül szerkesztőbizottsági tagja volt a világ vezető valószínűségszámítási folyóiratának, az *Annals of Probability*-nek, jelenleg is szerkesztője az *Annales de l'Institut Henri Poincaré – Probabilités et Statistiques,* illetve a *Periodica Mathematica Hungarica* lapoknak. Tíznél több rangos nemzetközi konferencia szervezésében vett részt, és számos nemzetközi tudományos bizottság tagja. Elnyerte az Akadémia Matematikai Díját (mai nevén: Erdős Pál-díj), a Széchenyi Professzori Ösztöndíjat, az Akadémiai Díjat, 2009-ben pedig a Magyar Köztársasági Érdemrend lovagkeresztje tüntetést.

Tudományos munkásság: Tóth Bálint rendezetlen rendszerek vizsgálatával kezdte kutatásait, melyek során statikus és dinamikus véletlen közegbe helyezett bolyongások és Brown-mozgások viselkedését vizsgálta. Különösen érdekes a Brown-mozgás egy új dinamikai elméletét kezdeményező, Szász Domokossal közös kutatása, amelynek keretében többek között Ya. G. Sinai eredményeit javították meg. Ehhez újabban Bálint Péterrel és Tóth Péterrel közös, igen látványos dolgozatában is visszatért. Figyelme később az önmagával kölcsönható bolyongások felé fordult. E folyamatok hosszú távú memóriával rendelkeznek; köztudottan nehezen vizsgálható modellek, melyek rendhagyó skálatulajdonságokat és határeloszlásokat mutatnak. Itt született eredményei rendkívül érdekesek, egy részük pedig szigorú megalapozását adja jeles elméleti fizikusok által korábban megfogalmazott sejtéseknek. Kutatásai két főbb vonal mentén haladtak tovább. Wendelin Wernerrel, a később Fields-éremmel kitüntetett francia matematikussal az ún. Brownian Web folyamatot, majd ennek segítségével ön-kölcsönható bolyongások folytonos verzióját konstruálták meg; ezeket az eredményeket Werner Fields-érmes laudációjában is kiemelték. Fritz Józseffel, majd Balázs Márton és Valkó Benedek PhD diákjaival pedig kölcsönható részecskerendszerek, illetve újabban polimer modellek fluktuációit és hidrodinamikai limeszét vizsgálta. Mindkét témakörben ismét jelentős eredmények születtek, és mindkét témakör szoros kapcsolatban áll a nem lineáris hiperbolikus parciális differenciálegyenletekkel. További diákjaival, Rudas Annával és Ráth Balázzsal véletlen gráfok vizsgálatába kezdett, Vető Bálinttal ismét ön-kölcsönható bolyongásokat vizsgálnak, Horváth Illéssel pedig felcserélhető változókkal foglalkoznak. Legfrissebb (Horváth Illés és Vető Bálint doktoranduszaival közös) eredményei újból a hosszú memóriájú bolyongások skála-limeszeivel kapcsolatosak. Ezúttal R. S. Varadhan és munkatársai eredményeinek eredeti adaptálásával három és magasabb dimenzióban bizonyítanak diffúzív aszimptotikus viselkedést.

Tóth Bálint kutatásait végig fizikai problémák motiválták, azokat fizikai szemléletmód és rendkívül széles körű matematikai tudás jellemzi. Munkássága során több, eddig Magyarországon nem kutatott témakörben is nemzetközileg kiemelkedő eredményt ért el.

Iskolateremtés és a sztochasztika szeminárium: A BME Matematika Intézet matematikus képzésének egyik erőssége a sztochasztika témájú tárgyak oktatása. E tárgyak kidolgozása és részben előadása is Tóth Bálint nevéhez köthető. Első két PhD diákja más egyetemről érkezve is komoly hasznát vette az itt tartott speciálelőadásoknak, további diákjai pedig már az Intézet saját végzősei közül kerültek ki. Oktatása során már nagyon is a tudományos életre készít fel: modern szemléletű órákkal és naprakész új eredmények beépítésével rendkívül hasznos és érdekes képzést valósít meg. A diákokat már az egyetemi években kutatásra ösztönzi. Tóth Bálint több díjnyertes TDK munka témavezetője volt. Diákjainak – azon kívül, hogy a legszínvonalasabb tudást és szemléletet közvetíti – mindig megadja a külföldi tapasztalat és előadás lehetőségét. Minden diákja töltött rendkívül hasznos időt rangos külföldi intézetekben vezető kutatók mellett, és tartott előadásokat szemináriumokon, nívós konferenciákon.

1999-től kezdve Tóth Bálint szervezésében folyamatosan működik a BME-n a sztochasztika szeminárium, melyen vegyesen hazai és meghívott nemzetközi kutatók adnak elő. Az előadók között világhírű kutatók éppúgy szerepelnek, mint első előadásukat tartó doktoranduszok. A szemináriumon így tudományosan rendkívül pezsgő és ösztönző légkör alakult ki, mely az ismeretek bővítésén kívül a fiatalok kutatására és előadói képességének fejlesztésére is rendkívül pozitívan hat. A szeminárium a hazai valószínűség-számítás legfontosabb rendszeres fóruma lett, melyhez Tóth Bálint szakmai, szervezési és emberi képességei nagyban hozzájárultak.

A nála, illetve a tanszéken végzett diákoknak maximális támogatást ad karrierjük elindításában. Tudományos pályára készülő diákjainak segít posztdoktori állásuk kiválasztásában, az iparba készülő diákoknak hasznos tanácsokkal szolgál.

Itt fontos megemlíteni jelentős érdemeit abban, hogy a Morgan Stanley – a világ egyik legnagyobb pénzügyi szolgáltató vállalata – London és New York után Budapesten nyitotta meg harmadik kutatóközpontját. Tóth Bálint jelenleg az MTA–BME sztochasztika kutatócsoportnak is vezetője, melynek tagja többek közt Nagy Katalin és Tóth Imre Péter.

Tanítványok: Formálisan természetesen nem tanítvány, de megemlítjük, hogy Tóth Bálinttal való együttműködés Wendelin Werner később Fields-éremmel kitüntetett kutatómunkájára nagyon jelentős hatással volt.

Végzett doktoranduszai Balázs Márton (ma a BME docense, korábban postdoc a University of Wisconsin–Madison-on) és Valkó Benedek (a University of Toronto-n töltött három év postdoc után ma *tenure track* állása van a University of Wisconsin–Madison matematika tanszékén). Mindketten jelentős eredményeket mutattak fel területük legnevesebb művelőivel együttműködve, nemzetközileg ismert kutatók. Ráth Balázs postdoc a zürichi ETH intézetben. Tóth Bálint jelenlegi doktoranduszai Rudas Anna (a Morgan Stanley munkatársa), Vető Bálint és Horváth Illés. Mindannyian nemzetközi szinten is jelentős eredményekkel büszkélkedhetnek.

Tóth Bálint minden diákjának gondosan kiválasztott témát ad. Olyan problémákat, melyek doktori képzés során megoldhatók, mégis kivívják a nemzetközi közösség érdeklődését és elismerését. Ízlése különösen szerencsésen ötvözi a matematika belső esztétikumát az elsősorban a fizika által felvetett kérdések megválaszolásának igényével. Témavezetése során mindig felhívja a figyelmet a mélyebb összefüggésekre, szemléletet, technikát, és emellett számos ötletet is ad. Tanítványainak emberileg is sokat ad, emberi és matematikai kultúrára és igényességre nevel. Az ő és tanítványai által végzett munka jótékonyan hat a matematika és fizika kölcsönhatására; Tóth Bálint méltón viszi tovább a Fritz József, Krámli András, Major Péter és Szász Domokos nevével fémjelzett matematikai–fizikai és valószínűség-számítási iskola szellemiségét. Mindennek elismeréseképpen jutalmazza Tóth Bálintot a Bolyai János Matematikai Társulat 2010. évi Szele Tibor-emlékéremmel.

Beke Manó-emlékdíj

A 2010. évi Beke Manó-emlékdíj bizottság körültekintő mérlegelés után az alábbi határozatot hozta: a Beke Manó-díj első fokozatában részesül **Oláh György;** a Díj második fokozatát kapják: **Egyed László, Koleszár Edit, Konfárné Nagy Klára, Liptainé Reszegi Ágnes, Munkácsy Katalin** és **Szabadosné Bécsi Katalin.**

Indoklás: *Oláh György* 1940. május 10-én született Komáromszentpéteren. 1957-ben érettségizett a Komáromi Magyar Gimnáziumban, majd 1961-ben a Pozsonyi Pedagógiai Főiskolán matematikatanári oklevelet szerzett. Ekecsen kezdett tanítani. 1964-től 1970-ig a Komáromi Magyar Gimnázium tanára, majd 1970 és 1978 között a Nyitrai Pedagógiai Főiskola adjunktusa volt. 1978-tól 2000-ig a Komáromi Ipari Középiskola tanára. Innen ment nyugdíjba. Ekkor meghívták a Komáromi Marianum Egyházi Gimnáziumba, ahol 3 évet tanított. Az 1960-as évek közepétől publikál. Számos matematikai tehetséggondozással és szakköri munkával kapcsolatos cikke jelent meg különböző hazai és magyarországi lapokban. Több mint egy tucat tankönyvet, segédkönyvet és feladatgyűjteményt fordított cseh és szlovák nyelvből magyarra. 1999-ben az ő szerkesztésében jelent meg Budapesten a „Határon túli magyar matematikaversenyek" c. könyv, valamint Komáromban a Honismereti Kiskönyvtár sorozatban a „Szentpéter" c. kis füzet. Tanítványai kimagasló eredményeket értek el a hazai és nemzetközi versenyeken és fórumokon. Felvidéken elsőként kapcsolta be tanítványait a világhírű magyarországi Középiskolai Matematikai Lapok és a prágai Matematikai és Fizikai Szemle (Rozhledy) című folyóiratok pontversenyeibe. Tanítványai kitűnő eredményeket értek el a szegedi Polygon c. lap pályázatán, az innovációs versenyen, valamint a Természet Világa c. szaklap pályázatán. Az 1997-es Természet – Tudomány Diákpályázaton az amerikai Martin Gardner által kitűzött díjat Oláh György tanítványa nyerte el. Folyamatosan működő rendezvények, diákversenyek, nyári egyetemek, szaktáborok (Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozó, Felvidéki Magyar Matematikaverseny, Nemzetközi Magyar Matematika Verseny, Gidró Bonifác Matematikai és Fizikai Napok) kezdeményezője és szervezője napjainkig. A budapesti Bolyai János Matematikai Társulat Rátz László-vándorgyűléseinek rendszeres résztvevője és néhány esetben előadója is volt. Több évtizeden keresztül részt vett A Matematika Tanítása c. folyóirat tanároknak szóló versenyén. Oláh Györgyöt a Bolyai János Matematikai Társulat a kiváló matematika-oktató és népszerűsítő munkásságáért 1985-ben Beke Manó-emlékdíj II. fokozatában részesítette. Sikeres pedagógiai tevékenységéért 2002-ben Komáromban polgármesteri díjat, 2005-ben az SZMPSZ Felvidéki Magyar Pedagógus Díját kapta meg. Oláh György a Szlovákiai Magyar Pedagógusok Szövetségének alapító tagja. Szakmai munkáját nyugdíjasként is folyamatosan végzi, mint az SZMPSZ külső munkatársa. Tizenkilencedik éve főszervezője a Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozónak; másfél évtizede szervezi, koordinálja a Felvidéki Magyar Matematikaversenyt; a Komáromban 1992-ben megrendezett Nemzetközi Magyar Matematikaverseny elindítója, szervezője, és azóta is régióvezetője, koordinátora annak a csapatnak, amely e jelentős fórumon évente képviseli a felvidéki magyar középiskoláinkat. Ünnepi alkalom az adományozók számára, hogy Oláh Györgyöt 70. születésnapja alkalmából 2010-ben a Beke Manó-emlékdíj első fokozatával is köszönthetik.

Egyed László 1987-ben végzett a szegedi József Attila Tudományegyetem matematika–fizika tanár szakán. 1988 augusztusától, azaz több mint húsz éve a bajai III. Béla Gimnáziumban tanít matematikát és fizikát. Kezdetben a diákmozgalmat segítő tanárként is tevékenykedett öt éven keresztül, majd 1994-ben megválasztották a matematika munkaközösség vezetőjének, amit azóta is ellát. Feladatai között szerepel az iskola órarendjének elkészítése is. Tanórai munkája mellett rendszeresen tart tehetséggondozó foglalkozásokat a diákok számára. Tanulói évek óta szerepelnek eredményesen a különböző tanulmányi versenyeken, és érnek el kimagasló eredményeket. A gimnázium által szervezett felvételi előkészítőket is tartott hatodikos, illetve nyolcadikos diákok számára. Ehhez kapcsolódóan az ABACUS című folyóiratban jelennek meg hatodikosoknak, illetve nyolcadikosoknak írt gyakorló felvételi feladatsorai. A különböző megyei, kistérségi matematikaversenyek szervezésében és lebonyolításában aktívan részt vesz. Tanítványai szeretik, és elismerik szakmai felkészültségét. A Kalmár László Országos Matematikaverseny, a Bátaszéki Matematikaverseny országos döntője és a Varga Tamás-matematikaverseny megyei fordulója dolgozatainak javításában is tevékeny részt vállal. Negyedik éve kap meghívást a Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozóra, ahol határon túli magyar és magyarországi diákok számára tart foglalkozásokat. Az új rendszerű érettségi rendszerben az emelt szintű dolgozatok javításában és a szóbeli vizsgáztatásban is aktív részt vesz. Az utóbbi években a tanártovábbképzéseken is tartott előadásokat. A Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány által szervezett „Általános- és Középiskolai Matematikai Tehetséggondozás" című továbbképzésen az általános iskolai szekcióban tart szemináriumokat. Rendszeresen részt vesz szakmai továbbképzéseken, Rátz László-vándorgyűléseken, hogy az ott szerzett tapasztalatokkal, ismeretekkel is bővítse szakmai tudását. Egyed László személyében méltó emberhez, pedagógushoz kerül a Beke Manó-díj.

Koleszár Edit a bajai Tanítóképző Főiskolán szerzett diplomát 1986-ban. Tanítói pályája Kecskeméthez kötődik. Diplomája megszerzése után a Zrínyi Ilona Általános Iskolában, majd 1993-tól a Vörösmarty Mihály Általános Iskolában tanított. 1996-tól 1998-ig a Matematikában Tehetséges Gyermekekért Alapítvány szervezőbizottságának titkára volt. Jelenlegi iskolájában, a Református Általános Iskolában 2000 óta dolgozik. Munkáját nagy szakmai elhivatottsággal, igényességgel, nagy odaadással végzi. Melegszívű, segítőkész, őszinte egyénisége példa a diákoknak és tanártársaknak egyaránt. Jó felkészültségét, sokoldalú tehetségét a kiváló képességű, és a hátrányos helyzetű tanulók nevelésében és tanításában egyaránt sikeresen kamatoztatja. Rendszeresen tart szakköröket, tanítványai eredményesen szerepelnek városi, megyei és országos versenyeken. Az iskolai tehetséggondozáson túl második éve vezet Kecskemét város matematikából tehetséges alsó tagozatos diákjai számára – a MATEGYE Alapítvány által szervezett és támogatott – matematika szakkört. Tanítói munkája mellett indulása, 1990 óta vesz részt a Zrínyi Ilona Országos Matematikaverseny szervezésében, a feladatsorok összeállításában és lektorálásában. Ez a verseny néhány év alatt – többek között az ő munkájának köszönhetően is – az ország legnépszerűbb matematikaversenye lett. 1993-tól 2003-ig ennek a versenynek a feladatsorait, megoldásait és eredményeit Matematikai versenytesztek címmel a MOZAIK Oktatási Stúdió adta ki minden évben. Koleszár Edit hat ilyen kötetnek volt a társszerzője. Koleszár Edit lelkiismeretes, sokoldalú munkájának elismerése a Beke Manó-díj.

Konfárné Nagy Klára 1980-ban szerzett matematika–fizika szakos diplomát a JATE Természettudományi Karán. Egy évig a jánoshalmi gimnáziumban, majd 1981 és 1987 között a Kőrösy József Közgazdasági Szakközépiskolában tanította mindkét tantárgyát. 1987 és 1991 között a Zrínyi Ilona Általános Iskola tanára volt. 1991-től az SZTE Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium matematika szakvezető tanára. Az elmúlt több mint két évtizedben rendkívül odaadó, eredményes munkát végzett a matematika tanítása terén. Munkája során speciális tantervű, emelt szintű, valamint alapóratervű matematikát tanuló, különböző tehetségű tanulókkal foglakozik. Rendkívül eredményes az a törekvése, hogy tanítványaiban felkeltse a problémaérzékenységet, és ezáltal kialakítsa a tantárgy iránti érdeklődést. Ennek is köszönhető, hogy igen sok tanítványa választotta életpályának a matematika művelését, tanítását, vagy szerepelt eredményesen a nemzetközi és hazai matematikaversenyeken. Diákjai közül többen készítettek színvonalas dolgozatokat a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének pályázataira. Tehetséggondozó munkája elismeréseként 1999-ben és 2009-ben Graphisoft-díjat kapott. Gyakorlóiskolai szakvezető tanárként nagy lelkiismeretességgel foglalkozik a nappali és levelező tagozatos matematika szakos tanárjelöltekkel. Kiemelkedő szakvezetői tevékenysége, felkészültsége, szerény egyénisége közel két évtizede példaként szolgál a tanári hivatásra készülő jelöltek számára. Konfárné Nagy Klára kollégái előtt is példa, méltó a Beke Manó-díjra.

Liptainé Reszegi Ágnes 1987 óta alapító tagként az egri Neumann János Közgazdasági Szakközépiskola és Gimnáziumban tanít matematikát, programozást és informatikát. Középiskolai oktató, nevelő és osztályfőnöki munkája mellett, 1997-től 2 éven keresztül felkérésre óraadó volt az egri Eszterházy Károly Tanárképző Főiskola számítástechnika tanszékén. Iskolájában rendszeresen készített föl osztályokat, csoportokat a matematika érettségire, valamint az egyetemi-főiskolai felvételire, jelenleg az emelt szintű érettségire. A tanítás során a tehetséges gyerekekkel korábban a fakultációs, jelenleg az emelt szintű órák mellett szakkörön és egyénileg is foglalkozik. Szaktanárként kezdeményezte, s a későbbiekben a természettudományos szakmacsoport vezetőjeként folytatta iskolájukban a Bolyai Kör szervezését. Annak érdekében, hogy a diákok a matematikaórákról kimaradó miértekre is válaszokat kapjanak, érdekes előadásokat, beszélgetéseket szerveztek remélve, hogy a diákok még közelebb juthatnak a nem is igazán „száraz" tudományhoz. Ugyanakkor felfedezhetik a kapcsolatot más tudományterületekkel. Az alapítók úgy tervezték, hogy az érdekes előadások szervezése mellett munkájukat szeretnék kiterjeszteni az alsóbb évesek tanulmányi patronálására is, egyfajta szellemi kört teremtve. Az iskola jelenlegi igazgatóhelyetteseként továbbra is részt vesz a csoport munkájában, és erőteljesen támogatja az új elképzeléseket. A természettudományos szakmacsoportban rendszeresen feladatot kapott a kerettantervek, haladási ütemtervek készítésében. 2004 júniusától a Neumann János Középiskola és Kollégium természettudományos szakmacsoportjának a vezetését bízták rá. Szakmacsoport-vezetői munkája alatt számos megyei és országos pályázaton vett részt az iskola. Publikációi közt találunk szakköri füzetet matematikai algoritmusokról, kriptográfiáról. Készített tananyagot, tanári segédleteket, feladatgyűjteményeket. 1999-ben Graphisoft-díjat kapott, 2006-ban iskolájában a Tanév Tanárának választották. 2010-től öt évre megbízást kapott a Heves Megyei Pedagógiai Intézet szaktanácsadói feladatainak ellátására matematika szaktárgyi és tanügy-igazgatási területeken. Liptainé Reszegi Ágnes eddigi áldozatos munkája alapján minden szempontból megérdemelten kapja a Beke Manó-díjat.

Munkácsy Katalin matematika–pedagógia szakon végzett az ELTE-n 1975-ben. Tanított több általános- és középiskolában, dolgozott az OPI Tantervelméleti

Osztályán és az ELTE BTK neveléstudományi tanszékén. Egyetemi bölcsészdoktori disszertációját a gimnazista tanulók otthoni tanulási módszereiről írta. 1987 óta az ELTE Tanárképző Főiskolai Karán, illetve annak megszűnése óta az ELTE TTK Matematikatanítási Módszertani Központjában dolgozik. A főiskolai szintű képzésben a matematikatörténet tantárgy felelőse. 2000-ben kezdeményezte Matematikatörténet és matematikatanítás konferenciasorozat életre hívását, ami nemzetközi konferenciává bővült, és kétévente rendszeresen megrendezésre kerül. Tantárgypedagógiai kutatásokat végez és szervez. A matematikatanítás szociológiája különösen érdekli, ezen belül, hogy az átlagosan jó képességű hátrányos helyzetű tanulókat hogyan lehet segíteni a jobb iskolai eredmények elérésében. Részt vesz azokban a kísérletekben, amelyek célja a hátrányos helyzetű településeken a számítógéppel segített matematikatanítás hatékonyságának vizsgálata. Ezen belül megemlítendő a Roma Informatikai Program, illetve az összevont tanulócsoportos kisiskolák tanítóinak szakmai együttműködési hálózatának szervezése. 2001-től évente megszervezi az angol nyelvű szekciót a Varga Tamás Módszertani Napokon, segítve az egyetemi hallgatók és a TDK-s diákok tudományos előrehaladását. Dolgozik a Bolyai János Matematikai Társulatban, ott a Matematikatörténeti Bizottság titkára, és a Magyar Pedagógiai Társaságban a Kerekgedei Makó Pál szakosztály vezetője. Ennek keretében matematikai játszóházat, valamint az összevont tanulócsoportos iskolák tanulói számára komplex versenyt is szervezett. Már hallgatóként megismerkedett az OTDK-s munkával, maga is írt dolgozatot. Oktatóként többször volt szakmai vezetője TDK dolgozatokat író hallgatóknak, akik kisebb-nagyobb sikereket értek el. Közülük kiemelkedett egy Pro Scientia aranyérmes hallgató. Az OTDK Tantárgypedagógiai és Oktatástechnikai szakmai bizottságának vezetőségi tagja. Munkácsy Katalin szerteágazó tevékenységének, aktivitásának és szakmai felkészültségének elismerése a Beke Manó-díj.

Szabadosné Bécsi Katalin 1983-ban végzett a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola matematika–fizika szakán kiváló tanárjelöltként. Ezt követően 1986-ban a Kossuth Lajos Tudományegyetemen középiskolai matematikatanári oklevelet is szerzett. Tanári munkáját a Kétegyházi Mezőgazdasági Szakiskolában kezdte, jelenlegi iskolája a Gyulai Alapfokú Közoktatási Intézmények 5. Sz. Általános Iskola és Sportiskolája, melyben 1991 óta tanít. Ez egy kisváros lakótelepi iskolája, közel 400 tanulóval, mintegy 30 hátrányos helyzetű, alulmotivált diákkal. Az iskola fő profilja, nevéből is kitűnik, a sport. Szabadosné Bécsi Katalin ebben a környezetben igyekszik mindent megtenni tantárgyai népszerűsítése érdekében. Tanári tevékenységét mindig nagy odaadással, szakmai precizitással végezte. Munkája során a szerényebb képességű tanulókkal való foglalkozást, és a tehetséges diákok plusz ismerethez juttatását egyformán fontosnak tartja. Felfedezve a szorgalmas, érdeklődő diákokat, differenciáltan foglalkoztatva őket, szakköri munkával, szabadidőben, időnként szünidőben végzett egyéni felkészítéssel igyekszik őket minél sikeresebbé tenni. Ösztönzi tanulóit az önálló munkára, így többen vesznek részt eredményesen levelező feladatmegoldó versenyeken. Az érdeklődő diákokat szakmai táborokba irányítja. Aktív szervezője a természettudományos kirándulásoknak, melyek úti célja között volt többek között a Természettudományi Múzeum, a Planetárium és a Debreceni Atommagkutató Intézet is. Többször volt szakmai lektora a 9.-es Békés megyei matematikafelmérésnek, valamint segített a Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematikai Emlékverseny döntője dolgozatainak előzetes értékelésében. Kiemelkedő munkát végzett a 2007. évi gyulai Rátz László-vándorgyűlés szervezésében és lebonyolításában. Tagja volt a 2009. évi gyulai Nemzetközi Magyar Matematikaverseny szervező csapatának. Kimagasló érdeme volt abban, hogy 2007 őszén a Bolyai-csapatverseny Békés megyében is meghonosodott. A megyei döntő egyik fő szervezője volt. Kétszeres siker volt ez számára, hiszen egyik csapatával az országos döntőre is bejutott, ahol még részt vett a szakmai zsűri munkájában is. Szabadosné Bécsi Katalin munkáját a kollégák, a szakmai közélet méltán ismeri el a Beke Manó-díjjal.

Grünwald Géza-emlékérem

2010-ben a Grünwald Géza-emlékéremre négy jelölés érkezett. A bizottság úgy határozott, hogy kutatási eredményeikre való tekintettel mind a négy jelölt Grünwald Géza-emlékéremben részesül, név szerint: **Keszegh Balázs, Mészáros Fruzsina, Pálvölgyi Dömötör** és **Végh László.**

Indoklás: *Keszegh Balázs* 1981-ben született, és 2005-ben szerzett matematikus diplomát az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, majd 2009-ben PhD fokozatot a CEU-n Győri Ervin és Tardos Gábor témavezetése mellett. Jelenleg az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet fiatal kutatója. Keszegh Balázsnak 13 publikációja van, amelyek közül egy a Journal of Combinatorial Theory, Series A folyóiratban jelent meg, a további 12 pedig rangos konferenciakiadványban. Eredményei kombinatorikus, illetve diszkrét geometriai jellegűek. A tiltott 0–1 mátrixok elméletében új konstrukciókat adott lineáris részmátrixok generálására. A gráflerajzolások elméletében társszerzőivel számos eredményt ért el arra vonatkozóan, hogy egy gráf síkba rajzolható-e úgy, hogy az élek csak kevés irányt használnak fel. A téglalappartíciók polikromatikus színezéseivel kapcsolatban bebizonyította, hogy minden d dimenzióban a hiperkocka minden guillotine-partíciójának létezik erős színezése. Ponthalmazok poligonalizációjával kapcsolatban társszerzőivel megmutatta, hogy a síkon adott általános helyzetű n pontra mindig ráilleszthető olyan poligon, amelynek legfeljebb $5n/12$ konkáv szöge van. Kiemelkedő eredményeire tekintettel Keszegh Balázs a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Mészáros Fruzsina 1981-ben született, és 2005-ben szerzett matematikus diplomát a Debreceni Egyetemen, majd 2010-ben PhD fokozatot Lajkó Károly témavezetésével ugyanott. Jelenleg a Debreceni Egyetem Analízis Tanszékén dolgozik tanársegédként. Mészáros Fruzsinának 9 publikációja van. Kutatásainak középpontjában függvényegyenletek és azok valószínűség-számításban történő alkalmazásai állnak. Az eredmények a korlátozott tartományon teljesülő függvényegyenletek elméletébe tartoznak, azaz a függvényegyenletekről csak annyit teszünk fel, hogy majdnem mindenütt teljesülnek, és a mérhető megoldásokat keressük. Így a korábbiaknál gyengébb – és az alkalmazások szempontjából természetesebb – feltételek mellett adott karakterizációt valószínűségi eloszlásokra az őket jellemző függvényegyenletekkel. Nevezetesen, az egyváltozós eloszlások jellemzései körében gyengébb feltételek mellett adott bizonyítást Lukács tételére a gamma- és a normális eloszlás, továbbá Wesolowski tételére a béta-eloszlás esetében. Hasonlóan, ilyen általánosabb feltételek mellett vizsgálta az Olkin–Baker-egyenletet és az exponenciális és logaritmikus Pexider-egyenleteket is, és adta meg azok megoldásait. Kiemelkedő eredményeire tekintettel Mészáros Fruzsina a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Pálvölgyi Dömötör 1981-ben született, és 2005-ben szerzett matematikus diplomát az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, majd 2010-ben PhD fokozatot az Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne-ban Pach János témavezetésével. Jelenleg az ELTE Számítógéptudomány Tanszékén dolgozik tanársegédként. Pálvölgyi Dömötörnek 21 publikációja van, közülük több rangos folyóiratokban. Jelentős eredményeket ért el több területen, úgymint extremális kombinatorikában, diszkrét geometriában, bonyolultságelméletben és kereséselméletben. Többek között társszerzőivel bebizonyította Aigner arra vonatkozó sejtését, hogy n elem közül a maximális és minimális megtalálásához $87n/32 + c$ páronkénti összehasonlításra van szükség, ha a válaszok között egy hamis is lehet. További fontos eredményei a sík sokszoros lefedéseinek szétszedéséről szólnak. Az alapprobléma az, hogy ha adva van a sík egy fedése egyetlen alakzat eltoltjaival úgy, hogy minden pont legalább k-szor van fedve, akkor szétszedhető-e ez a fedés két fedéssé, azaz kiszínezhetőek-e az eltoltak pirossal és kékkel úgy, hogy minden pontot fedjen egy kék és egy piros eltolt is. Pálvölgyi Tóth Gézával közös munkájában belátta Pach János egy sejtését, miszerint minden konvex poligon által történő elegendően sokszoros fedés szétszedhető. Később Pálvölgyi megmutatta, hogy konkáv poligonok egy nagy osztályára ez már nem igaz, ezzel általánosítva Pach, Tardos és Tóth egy négyszögekre vonatkozó eredményét. Kiemelkedő eredményeire tekintettel Pálvölgyi Dömötör a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Végh László 1981-ben született, és 2004-ben szerzett matematikus diplomát az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, majd 2010-ben PhD fokozatot ugyanott Frank András témavezetése mellett. Jelenleg az MTA-ELTE Egerváry Jenő Kombinatorikus Optimalizálási Kutatócsoport tudományos segédmunkatársa. Végh Lászlónak 7 publikációja van, köztük több nagy presztízsű folyóiratokban. Megemlítjük még, hogy kiemelkedő sikerként 2010-ben ő nyerte el a STOC konferencia Best Student Paper díját. Végh kutatásai döntően gráfok összefüggőségi kérdéseivel foglalkoznak. Kovács Erikával közösen tetszőleges k és l esetén a (k, l)-élösszefüggőségi gráfokra bebizonyították Mader egy előállítási tételének kiterjesztését. Benczúr Andrással közösen tisztán kombinatorikus algoritmust fejlesztett ki digráfok k-összefüggővé növelésére. Végh László harmadik kiemelkedő eredménye választ ad az irányítatlan gráfok összefüggőség-növelésének problémájára, legalábbis abban a speciális esetben, amikor az összefüggőséget eggyel akarjuk növelni. Végh László a feladatra polinomiális algoritmust fejlesztett ki. Eredménye jelentős újdonság a kombinatorikus optimalizálásban. Kiemelkedő eredményeire tekintettel Végh László a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Farkas Gyula-emlékdíj

A bizottság, a beérkezett javaslatok alapján 2010-ben négy Farkas Gyula-emlékdíjat adományoz.A díjazottak: **Fekete Zsolt, Iván Szabolcs, Kiss Márton** és **Ligeti Péter.**

Indoklás: *Fekete Zsolt* a miskolci Földes Ferenc Gimnázium speciális matematika osztályában érettségizett 1996-ban. Alkalmazott matematikus diplomáját az Eötvös Loránd Tudományegyetemen 2001-ben, PhD-jét az ELTE Egerváry Kutatócsoportjának (EGRES) tagjaként Jordán Tibor vezetésével 2007-ben szerezte meg. 2006-ban csatlakozott az MTA SZTAKI Adatbányászat és Webes Keresés Kutatócsoporthoz. Fekete Zsolt az adatbányászat klasszifikáció témájának sikeres szakértője. Tudását számos alkalmazási területen sikerrel kamatoztatta, ahol az alkalmazott matematikai alkotókészséget és tudást kapcsolta össze a megvalósításhoz szükséges szoftvermérnöki tevékenységgel. Eredményesen vett részt képi adatbázisok, web spam, visual analytics területén folyó kutatásokban. 12 referált folyóirat-, illetve konferenciacikket jelentetett meg.

Iván Szabolcs a Szegedi Tudományegyetemen szerzett programtervező matematikus diplomát 2005-ben, majd a Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola elvégzése után PhD fokozatot 2009-ben. Disszertációját a faautomaták és modális logika témakörben írta Ésik Zoltán témavezetésével. Kutatási területe azóta a végtelen szavak és az irányított automaták témakörökkel bővült. 2008 óta a Szegedi Tudományegyetem számítástudomány alapjai tanszékének tanársegédje. Eddig 11 tudományos dolgozata jelent meg, nagyobbrészt impakt faktorral rendelkező folyóiratokban és alacsony elfogadási arányú, szigorú előbírálatot alkalmazó konferenciák kiadványaiban. Aktív oktató- és kutatómunkája mellett az ACM programozói verseny egyik felkészítő tanára.

Kiss Márton a Fazekas Gimnáziumban érettségizett, majd az ELTE-n szerzett matematikus diplomát. Azóta, először PhD hallgatóként, majd egyetemi tanársegédként, jelenleg pedig adjunktusként a Műegyetemhez, illetve az alkalmazott analízis szakmához kötődik. 8 eddigi dolgozatának többsége a Dirac-, illetve a Schrödinger-operátorra vonatkozó inverz szórási feladattal foglalkozik. Kiss Márton találékonyan alkalmazta, és részben tovább is fejlesztette azokat a kifejezetten igényes analitikus technikákat, amelyeket témavezetője, Horváth Miklós dolgozott ki az Annals of Mathematics-ban megjelent nagy hatású munkájában. Az inverz szórási feladat a kísérleti fizika egyik alapvető spektrális mérési eljárásának matematikai elmélete. Minden, az eddigieknél élesebb becslés a potenciálfüggvény pontosabb rekonstrukcióját teszi lehetővé. Az elért absztrakt eredmények felhasználást nyertek a BME Fizika Intézetében.

Ligeti Péter az ELTE-n végzett alkalmazott matematikus szakon 2001-ben, majd ugyanitt, ugyancsak alkalmazott matematikusként kapott PhD fokozatot 2008-ben. Disszertációjának témavezetője Sziklai Péter volt. Az értekezésben a biológia matematikájának egyik legfontosabb kérdésével kapcsolatban azt vizsgálta, hogy egy adott szót annak milyen nagyságú részeiből lehet egyértelműen visszaállítani. A kérdésnek a DNS-szekvenciák azonosításában nagyon fontos gyakorlati alkalmazása van. Kutatási területe azóta is részben a DNS-ek matematikája, részben kriptográfia, és általában alkalmazott kombinatorika. 2005 és 2008 között a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet fiatal kutatója volt, azóta az ELTE Informatikai Kar komputeralgebra tanszékén tanársegéd. Eddig 14 publikációja jelent meg, közülük 5 impakt faktorral rendelkező nemzetközi folyóiratban, és két szabadalmazott eljárásban is társszerző.

Rényi Kató-emlékdíj

A Rényi Kató-emlékdíj II. fokozatát nyerte el **Szokol Patrícia Ágnes,** a Debreceni Egyetem végzett alkalmazott matematikus szakos hallgatója.

Indoklás: *Szokol Patrícia Ágnes* kvantummechanikai struktúrák transzformációival foglalkozik. Témavezetőjével, Molnár Lajossal általanosította Molnár egy tételét, amely leírta kvantumrendszerek kevert állapotait reprezentáló sűrűségoperátorok tere azon bijektiv transzformációit, amelyek megőrzik a relatív entrópiát. Molnár és Szokol belátja, hogy a leírás akkor is érvényben marad, ha elhagyjuk a bijektivitás feltevését.

Szokol Patrícia Ágnes tudományos dolgozatai:

[1] L. Molnár, P. Szokol: Maps on states preserving the relative entropy, II, *Linear Algebra Appl.,* **432** (2010), 3343–3350.

Patai László Alapítvány díja

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége által kiküldött bizottság többségi szavazással a 2010. évi Patai László Alapítvány díját **Gselmann Eszter** részére ítélte oda.

Indoklás: *Gselmann Eszter* 2007-ben a Debreceni Egyetem Természettudományi Karán matematikus szakon kapott diplomát. Még ebben az évben elkezdte doktori tanulmányait – Maksa Gyula irányítása mellett – függvényegyenletek témakörben. Eddig tíz dolgozata jelent meg referált folyóiratokban, további egy van közlésre elfogadva, és öt publikálásra benyújtva. Munkái már most komoly érdeklődést keltettek. Az eredmények egy részéből már elkészült és védés előtt áll „Az információelmélet néhány függvényegyenletének stabilitása" című PhD disszertációja. Ebben egy egység témáról – az információmértékek jellemzésével összefüggésben alapvető szerepet játszó – paraméteres információ alapegyenlet stabilitásáról szóló eredményeit foglalja össze. A stabilitás problémáját a Cauchy-egyenlettel kapcsolatban Ulam vetette fel 1940-ben, de azóta számos más függvényegyenlettel összefüggésben is fogalmaztak és oldottak meg analóg problémákat. Dolgozataiban Gselmann Eszter teljes megoldást ad az információ paraméteres alapegyenlete stabilitásának problémájára bármilyen egytől különböző valós szám is az egyenletben szereplő α paraméter.

Az entrópiaegyenlet és annak egy módosított változata általános és reguláris megoldásai meghatározásával kapcsolatban is számos eredményt ért el. Részleges választ adott továbbá arra a kérdésre, hogy milyen az a halmaz, amelynek a pontjaiban minden nem negatív információfüggvény megegyezik Shannon-félével.

JELENTÉS A 2010. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 2010. október 22. és november 2. között rendezte meg a 2010. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, valamint 2010-ben egyetemet vagy főiskolát végzettek vehettek részt.

A Bolyai János Matematikai Társulat a verseny megrendezésére a következő bizottságot kérte fel: *Ruzsa Imre* (elnök), *Ambrus Gergely* és *Matolcsi Máté* (titkárok), *Abért Miklós, Buczolich Zoltán, Keleti Tamás, Lempert László, Makai Endre, Móri Tamás, T. Sós Vera.* A versenybizottság 11 feladatot tűzött ki.

A versenyre 4 versenyző összesen 18 megoldást nyújtott be, melyek közül 15 volt helyes (vagy lényegében helyes). Ezek értékelése után a versenybizottság a következő döntést hozta:

I. díjban részesül **Lovász László Miklós,** az ELTE harmadéves hallgatója.

II. díjat a bizottság nem ad ki.

III. díjban részesül **Tomon István,** az ELTE másodéves hallgatója.

Indoklás:

Lovász László Miklós teljes megoldást adott az 1., 2., 3., 4., 5., 6., 11. feladatokra. A 8. feladatra adott megoldása apró hibát tartalmaz. A 7. és 10. feladatoknál részeredményt bizonyít.

Tomon István jó megoldást adott az 1., 2., 3., 5. feladatokra. A 4. feladatra adott megoldása hiányos.

A feladatok és megoldásaik

Minden feladat sorszáma után feltüntetjük a kitűzők nevét.

1. feladat (Balog Antal). *Legyen p prím. Jelölje $N(p)$ azon x egész számok számát, melyekre $1 \le x \le p$ és*
$$x^x \equiv 1 \pmod p.$$

Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan $c < 1/2$ és $p_0 > 0$ számok, hogy

$$N(p) \le p^c,$$

amennyiben $p \ge p_0$.

Megoldás (a kitűző megoldása alapján): A megoldás során közismert elemi számelméleti összefüggések mellett felhasználjuk azt is, hogy

$$d(n) =: \sum_{d|n} 1 \le n^{\varepsilon} \tag{1}$$

minden $\varepsilon > 0$-ra, amennyiben $n \ge n_0(\varepsilon)$.

Picit általánosabban, legyen $N(p; a)$ azon x egész számok száma, melyekre

$$x^x \equiv a \pmod p, \quad 1 \le x \le p.$$

Jelölje továbbá $\operatorname{ord}(a)$ az a rendjét modulo p. Azt bizonyítjuk be, hogy minden $t \mid p-1$-re

$$S(t) =: \sum_{\operatorname{ord}(a)|t} N(p; a) \le p^{1/3+\varepsilon} t^{2/3} \tag{2}$$

minden $\varepsilon > 0$-ra, amennyiben $p \ge p_0(\varepsilon)$. A $t = 1$ eset nyilván a feladat megoldása $c = 1/3 + \varepsilon$ kitevővel.

$\operatorname{ord}(a) \mid t$ pontosan azt jelenti, hogy $a^t \equiv 1 \pmod p$, azaz $S(t)$ azon x egész számok száma, melyekre

$$x^{tx} \equiv 1 \pmod p, \quad 1 \le x \le p-1 \tag{3}$$

($x = p$ nyilván nem megoldás). Legyen g egy primitív gyök modulo p, és legyen $\operatorname{ind}(a)$ az a indexe g-re vonatkoztatva, azaz $a \equiv g^{\operatorname{ind}(a)} \pmod p$. Ezen a nyelven (3) azzal ekvivalens, hogy

$$tx \operatorname{ind}(x) \equiv 0 \pmod{p-1}, \quad 1 \le x \le p-1,$$

illetve

$$x \operatorname{ind}(x) \equiv 0 \ \left(\operatorname{mod} \frac{p-1}{t}\right), \quad 1 \le x \le p-1. \tag{4}$$

Ezek után csoportosítjuk (4) megoldásait

$$\operatorname{lnko}\left(x, \frac{p-1}{t}\right) = d$$

szerint (lnko a legnagyobb közös osztót jelöli), azaz rögzített $d|(p-1)/t$ mellett legyen $x = yd$, ahol

$$\operatorname{ind}(dy) \equiv 0 \ \left(\operatorname{mod} \frac{p-1}{td}\right), \quad 1 \le y \le \frac{p-1}{d}, \quad \operatorname{lnko}\left(y, \frac{p-1}{td}\right) = 1. \tag{5}$$

Legyen az (5)-öt kielégítő y-ok halmaza $\mathcal{Y}_d$, és legyen az általuk képviselt mod p maradékosztályok halmaza $\mathcal{W}_d$. Nyilván $\#\mathcal{Y}_d = \#\mathcal{W}_d$, továbbá

$$S(t) =: \sum_{\operatorname{ord}(a)|t} N(p; a) = \sum_{d \mid \frac{p-1}{t}} \#\mathcal{Y}_d = \sum_{d \mid \frac{p-1}{t}} \#\mathcal{W}_d. \tag{6}$$

Két triviális becslés is adható $\#\mathcal{Y}_d$-re (5)-ből. Az első feltételnek pontosan td maradékosztály, míg a másodiknak pontosan $(p-1)/d$ egész szám tesz eleget, azaz

$$\#\mathcal{Y}_d \le \min\left(td, \frac{p-1}{d}\right). \tag{7}$$

Csak ezeket használva már bizonyítható egy, a tételünkhöz hasonló állítás $1/3$ helyett $1/2$ kitevővel. A következőkben egy harmadik, kicsit mélyebb becslést is adunk $\#\mathcal{Y}_d$-re, ami (7)-tel együtt elegendő lesz.

Bevezetünk egy utolsó jelölést,

$$s(b) = \#\{(y_1, y_2) : y_1, y_2 \in \mathcal{Y}_d,\ y_1 y_2 \equiv b \pmod p\}.$$

Vegyük észre, hogy $s(b)$ csak akkor nem 0, ha b egyike a $w_1 w_2$ alakú maradékosztályoknak, amelyekből (5) első feltételéből következően nincs sok, hiszen

$$\operatorname{ind}(d^2 w_1 w_2) \equiv \operatorname{ind}(dy_1) + \operatorname{ind}(dy_2) \equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{p-1}{td}\right),$$

azaz legfeljebb td ilyen maradékosztály lehet. Ebből pedig

$$(\#\mathcal{Y}_d)^2 = \sum_b s(b) \le td \max_b (s(b)). \tag{8}$$

Tetszőleges b-hez, ha $s(b)$ számolja az y_1, y_2 párt, akkor $y_1 y_2 = b + \ell p$, és (5) második feltételéből $b + \ell p \le (p-1)^2/d^2$. Ilyen ℓ legfeljebb $1 + p/d^2$ lehet, azaz (1)-re hivatkozva

$$s(b) \le \sum_\ell d(b + \ell p) \le \left(1 + \frac{p}{d^2}\right) p^\varepsilon,$$

amennyiben $p \ge p_0(\varepsilon)$. Ezt (8)-ba írva (7) úgy módosul, hogy

$$\#\mathcal{Y}_d \le \min\left(dt, \frac{p-1}{d}, \left(\sqrt{td} + \sqrt{\frac{pt}{d}}\right) p^\varepsilon\right). \tag{9}$$

$d \le (p/t)^{1/3}$-ra az első, $d > (p/t)^{2/3}$-ra a második, míg a maradék esetben a harmadik becslést használva a minimumból, a tétel állítása most már rutinszámítással következik, amikor (9)-et (6)-ba írjuk, és ismét hivatkozunk (1)-re.

A feladatra Lovász László Miklós és Tomon István adtak helyes megoldást.

2. feladat (Abért Miklós, Lippner Gábor, Csóka Endre, Terpai Tamás). *Legyen G megszámlálhatóan végtelen, d-reguláris, összefüggő, csúcstranzitív gráf. Mutassuk meg, hogy G-ben van teljes párosítás.*

Megoldás (Lovász László Miklós): Feltehető, hogy G-ben nincs se többszörös él, se hurokél. Ha van hurokél, a csúcstranzitivitás miatt minden csúcson ugyanannyi van, ezért ezeket elhagyhatjuk, és kisebb d_1-re d_1-reguláris, csúcstranzitív lesz, és az összefüggőség sem romolhatott el. Ha van többszörös él, akkor ha minden párhuzamos élt eltörlünk (tehát ahol volt valamennyi él két csúcs között, ott egy marad), akkor az összefüggőség nem romlik el, és ami eredetileg automorfizmus volt, az is marad. Ebből az is következik, hogy – esetleg kisebb d_2-re – d_2-reguláris. A továbbiakban tehát feltesszük, hogy G egyszerű.

Először belátjuk, hogy minden véges halmaznak a foka legalább d (egy halmaz fokán a belőle kimenő éleket értjük, legyen H foka $d(H)$). Legyen k a legkisebb szám, ami előfordul véges halmaz fokaként, és legyen X egy minimális halmaz, aminek a foka k. (Mivel véges méretű halmazokat nézünk, van ilyen.) Tegyük fel, hogy van X-ben legalább két pont: v_1 és v_2. Ekkor van egy automorfizmus, ami v_1-et v_2-be viszi. Legyen X képe X_1, nyilván ennek is k a foka. Ekkor $X_1 \cap X$ tehát nem üres (v_2 mindkettőben benne van), ezért

$$d(X \cap X_1) + d(X \cup X_1) \leq d(X) + d(X_1) = 2k.$$

Mivel $X_1 \cup X$ is véges, a bal oldalon mindkét tag legalább k, így csak az lehet, hogy mindkettő egyenlő k-val. De ekkor $X \cap X_1 \subset X$, így mivel feltettük, hogy X minimális k-fokú halmaz, a kettő egyenlő, ez pedig csak úgy lehet, hogy $X_1 = X$ (mivel a méretük egyforma). De ekkor az automorfizmust megszorítva X-re, annak egy automorfizmusát kapjuk. Mivel tetszőleges két X-beli v_1, v_2 pontra igaz, hogy van olyan automorfizmus, ami egymásba viszi őket, ez azt jelenti, hogy minden X-beli pontra az X-beli foka ugyanaz, legyen ez a. Ha X mérete l, akkor $l \geq a + 1$, mivel egyszerű a gráf. Ekkor egy X-beli csúcsból $d - a$ él jön ki. Tehát X foka összesen $l(d - a) \geq (a + 1)(d - a) \geq d$. Itt ez azért legalább d, mert $a = d$ nem lehet, hiszen ekkor nem jönne ki él X-ből, nem lenne összefüggő a gráf, tehát két pozitív egész szám összege $d + 1$, ekkor a szorzatuk legalább d (itt használjuk ki, hogy a gráf összefüggő).

Belátunk egy lemmát. Vizsgáljuk meg annak a feltételét, hogy ha egy tetszőleges G_1 véges gráfban a pontok két részre vannak osztva, A és B, mikor van olyan részhalmaza az éleknek, hogy minden csúcs foka legfeljebb egy, és minden A-beli csúcs foka pontosan egy. Fel fogjuk használni Tutte tételét arról, hogy mikor létezik teljes párosítás egy (véges) gráfban (ez a tétel szerepelt a tananyagban). A tétel a következő: akkor és csak akkor létezik teljes párosítás egy $G = (V, E)$ gráfban, ha bárhogy vesszünk egy $X \subset V$ halmazt, ha nézzük $G - X$-ben a páratlan komponensek számát, ez legfeljebb annyi, mint X mérete. (A tétel implicite kiköti, hogy minden komponens páros legyen, ha X-nek az üres halmazt vesszük.) Legyen B mérete b, vegyünk hozzá a gráfhoz b vagy $b + 1$ csúcsot, ezek alkossák a C halmazt, úgy, hogy páros sok csúcs legyen. Bármely két C-beli csúcs között menjen él, és minden C-beli csúcsból minden B-beli csúcsba menjen él. Ekkor ebben a bővebb gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha eredetileg volt olyan, amit akartunk. Ugyanis ha az eredetiben volt, akkor amelyik B-beli csúcsnak nem jutott pár, azt kiegészíthetjük egy C-be menő éllel, majd ami kimarad C-ben, azokat is összepárosíthatjuk: a paritás miatt ez lehetséges lesz. Ha viszont a nagyobb gráfban van teljes párosítás, akkor egy A-beli csúccsal szomszédos él az eredeti gráfban is benne volt, így ha csak azokat az éleket vesszük, azok jók lesznek. Ezután Tutte tételét alkalmazzuk a bővebb gráfra. Vizsgáljuk meg, mi történhet, ha elhagyunk egy X halmazt $A \cup B \cup C$-ből. Először vegyük észre, hogy C-t vagy egészében érdemes belevenni, vagy egyik C-beli csúcsot se. Ugyanis ha van C-ből csúcs, ami nincs X-ben, akkor ha a többi C-beli csúcsot is kihagyjuk, csökken az X-beli csúcsok száma, viszont legfeljebb eggyel csökkenhet a páratlan komponensek száma (a komponensek nem változhatnak, csak az lehet, hogy az a komponens, amelyikben a C-beli csúcsok voltak, párosból páratlan méretű lesz). Ha viszont a teljes C benne van X-ben, nézzük mi történik, ha kivesszük őket. Két eset van. Az egyik, hogy volt B-beli csúcs, ami nincs benne X-ben. Ekkor az olyan komponensek, amelyekben szerepelt B-beli csúcs, egy komponenssé válnak. Ilyenből legfeljebb b volt, és új komponens nem jöhetett létre. Ha minden B-beli csúcs benne volt X-ben, ekkor amikor kivesszük C-t, ők egy külön komponenst alkotnak, más komponensek nem egyesülnek. Ekkor azonban nem egyesültek komponensek. Tehát a komponensek száma mindkét esetben legfeljebb

$(b-1)$-gyel csökkent (lehet, hogy nőtt eggyel), viszont X mérete legalább b-vel csökkent. Tehát csak az olyan X halmazokat kell nézni, amelyek $A \cup B$-nek részhalmazai. Ekkor ha elhagyjuk, akkor a komponensek úgy néznek ki, hogy van egy, ami tartalmazza az összes megmaradt $B \cup C$-beli csúcsot, és esetleg vannak még A-beli komponensek. Vegyük észre, hogy az nem lehet, hogy X mérete pontosan eggyel kevesebb, mint a páratlan komponensek száma, mivel a gráfnak összesen páros sok csúcsa van. Ezért elég azt kikötni, hogy a tisztán A-beli csúcsokból álló páratlan komponensek számánál nagyobb-egyenlő legyen az X mérete. Viszont ezzel az eredeti gráfra kaptunk egy feltételt. Tehát azt kaptuk, hogy G_1-ben akkor és csak akkor van olyan párosítás, amiben minden A-beli csúcsnak jut él, ha bárhogy hagyunk el a csúcsoknak egy X részhalmazát, a maradék gráfnak az olyan páratlan komponenseinek a száma, amelyekben csak A-beli csúcsa van, legfeljebb annyian vannak, mint X mérete.

Most visszatérünk a feladatban szereplő G gráfhoz. Bebizonyítjuk, hogy bárhogy jelölünk ki véges sok csúcsot, legyenek ezek az A halmazban, van olyan részhalmazuk az éleknek, hogy ezeknek a foka pontosan 1. Vegyük először bele a B halmazba az összes A-beli csúcs A-n kívüli szomszédját. Ellenőrizzük ezt a lemma feltételét az eredeti G gráfban az $A \cup B$ csúcsok által feszített G_1 részgráfra. Ebben tudjuk, hogy minden pont foka legfeljebb d, és minden halmaznak, ami csak A-beli csúcsokból áll, a foka legalább d (mivel minden A-beli csúcs minden szomszédját bevettük). Tegyük fel, hogy van egy X halmaz, ami megsérti a feltételt, legyen a mérete k, és tegyük fel, hogy a maradék gráfnak $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$ mind A-beli csúcsokból álló páratlan komponensek. Számoljuk meg, hány él megy X és valamelyik A_i között. Egyrészt legalább $(k+1)d$, mivel minden A_i-ből megy ki legalább d él, és ezek csak X-be mehetnek. Viszont legfeljebb kd, mivel minden X-beli csúcs foka legfeljebb d. Ez ellentmondás ($d = 0$ nem lehet, nem lenne a gráf összefüggő). Ezzel beláttuk, hogy a csúcsok egy tetszőleges részhalmazához van az éleknek egy részhalmaza, amelyre minden A-beli csúcs foka pontosan egy.

Alkalmazni fogjuk az ítéletkalkulus kompaktsági tételét. Ez a következő: Ha vannak ítéletváltozóink, és felettük egy Γ formulahalmaz, akkor és csak akkor lehet minden Γ-beli formulát kielégíteni, ha minden véges részhalmazát ki lehet elégíteni. Vegyünk be minden e élre egy A_e ítéletváltozót; az, hogy ez igaz, annak fog megfelelni, hogy az élt belevesszük az élek részhalmazába. Minden v csúcshoz vegyük be a következő formulákat: Ha $e_1, \ldots, e_d$ azok az élek, amelyek illeszkednek v-re, akkor

$$(A_{e_1} \cup A_{e_2} \cup \ldots \cup A_{e_d})$$

legyen egy formula, és minden $i \neq j$ élpárra vegyük be, hogy

$$\neg(A_{e_i} \cap A_{e_j})$$

(Az első akkor teljesül egy csúcsra, ha a foka legalább egy, a második minden élpárra akkor teljesül, ha legfeljebb egy.) Tegyük fel, hogy ezekből véges sok adva van. Ekkor csak véges sok csúcs lehet, ami szomszédos valamelyik formulában szereplő éllel. Ezért ha ezek a csúcsok az A halmazt alkotják, ha vesszük az előbb bizonyított állítás szerint azt az élhalmazt, amire minden A-beli csúcs foka egy, akkor az kielégíti ezt a véges sok formulát. Tehát a kompaktsági tétel szerint lehet úgy választani az ítéletváltozókat, hogy az összes formulát kielégítse, vagyis létezik teljes párosítás.

A feladatra Király Csaba, Lovász László Miklós és Tomon István adtak helyes megoldást.

3. feladat (Gyárfás András). *Egy n elemű alaphalmazon legfeljebb hány különböző A_1, $\ldots, A_t$ részhalmaz adható meg úgy, hogy bármely $1 \leq i < j < k \leq t$ esetén $A_i \cap A_k \subseteq A_j$?*

Megoldás (Tomon István): Legyen H egy n elemű halmaz, és $A_1, \dots A_t \subset H$ előírt tulajdonságú részhalmazok. Ekkor a feltételek alapján minden $x \in H$-ra és minden $i < j$-re igaz, hogy ha $x \in A_i$ és $x \in A_j$ akkor $x \in A_i, A_{i+1}, \dots A_j$. Tehát ha I_x jelöli azon indexek halmazát, amelyekre $x \in A_i$, akkor I_x minden x esetén egy egész számokból álló intervallum. Mivel az $A_1, \dots A_t$ halmazok páronként különbözők, ezért minden $1 \le i \le t-1$ esetén létezik olyan $x \in H$, hogy $x \in A_i$, de $x \notin A_{i+1}$, vagy fordítva $x \notin A_i$, de $x \in A_{i+1}$. Az első esetben az I_x intervallum végpontja i, míg a második esetben az I_x kezdőpontja $i+1$. Rendeljük hozzá minden i-hez $(1 \le i \le t-1)$ az egyik olyan $x \in H$ elemet, amelyre az A_i és A_{i+1} halmazok különböznek x-ben. Ekkor az előzőek alapján minden x-et legfeljebb 2 különböző i-hez rendelhettük. Ezenkívül ha A_1 nem üres, akkor minden $y \in A_1$-et legfeljebb csak egy i-hez rendelhettük, illetve ha A_t nem üres, akkor minden $z \in A_t$-t is csak legfeljebb egy i-hez rendelhettük. Mivel ha $t \ge 2$, akkor A_1 és A_t közül legalább az egyik nem üres, így lesz olyan H-beli elem, amit legfeljebb egy i-hez rendeltünk. Így azt kapjuk, hogy az (i, x) számpárok száma egyrészt $t-1$ (hiszen ennyi i van), másrészt legfeljebb $2|H|-1$ (az x-ek szerint leszámolva). Tehát $t-1 \le 2|H|-1$, azaz $t \le 2n$.

Megmutatjuk, hogy $t = 2n$ fennállhat. Legyen $H = \{1, 2, \dots, n\}$, és $1 \le j \le n$ esetén legyen $A_j = \{1, 2, \dots, j\}$, és $n+1 \le j \le 2n-1$ esetén legyen $A_j = \{j+1-n, j+2-n, \dots, n\}$, és $A_{2n} = \emptyset$. Ez $2n$ darab páronként különböző halmaz, amelyek könnyen láthatóan kielégítik a feltételeket.

A feladatra Király Csaba, Kutas Péter, Lovász László Miklós és Tomon István adtak helyes megoldást.

4. feladat (Kós Géza). *Bizonyítsuk be, hogy ha $n \ge 2$ és $I_1, I_2, \dots, I_n$ főideálok egy egységelemes, kommutatív gyűrűben úgy, hogy bármely nem üres $H \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ esetén $\sum_{h \in H} I_h$ is főideál, akkor*

$$I_2 I_3 I_4 \dots I_n + I_1 I_3 I_4 \dots I_n + \dots + I_1 I_2 \dots I_{n-1}$$

szintén főideál.

Megoldás (a kitűző megoldása alapján):

Lemma. *Ha A, B és $A+B$ mindegyike főideál, akkor $A \cap B$ is főideál, és $(A+B) \cdot (A \cap B) = AB$. (Avagy, ha két elemnek létezik legnagyobb közös osztója, és az előáll lineáris kombinációként, akkor létezik legkisebb közös többszörösük is, továbbá a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös szorzata megegyezik a két eredeti elem szorzatával.)*

Bizonyítás. Legyen $A = \mathbf{1}a$, $B = \mathbf{1}b$ és $A + B = \mathbf{1}d$. Ekkor léteznek olyan u, v, p, q gyűrűelemek, amikre $d = au + bv$, $a = pd$ és $b = qd$. Megmutatjuk, hogy $A \cap B = \mathbf{1}pqd$.

Mivel $\mathbf{1}pqd \subset \mathbf{1}pd = \mathbf{1}a = A$ és $\mathbf{1}pqd \subset \mathbf{1}qd = \mathbf{1}b = B$, teljesül, hogy $\mathbf{1}pqd \subset A \cap B$.

A fordított tartalmazás bizonyításához legyen $w \in A \cap B$ egy tetszőleges elem; azt kell igazolnunk, hogy $w \in \mathbf{1}pqd$. Legyen s, illetve t olyan gyűrűelem, amire $w = as = bt$. Ekkor

$$pds = as = w = bt = qdt, \quad \text{és}$$

$$w = pds = p(au + bv)s = pu \cdot as + pvs \cdot b = pu \cdot qdt + pvs \cdot qd = pqd \cdot (tu + vs) \in \mathbf{1}pqd.$$

Tehát az is igaz, hogy $A \cap B \subset \mathbf{1}pqd$, vagyis valóban $A \cap B = \mathbf{1}pqd$.

Végül,

$$(A+B) \cdot (A \cap B) = \mathbf{1}d \cdot \mathbf{1}pqd = \mathbf{1}pd \cdot \mathbf{1}qd = A \cdot B. \quad \blacksquare$$

A feladat megoldása. Legyen tetszőleges $J_1, J_2, \ldots, J_k$ ideálokra

$$S(J_1, \ldots, J_k) = J_2J_3J_4 \ldots J_k + J_1J_3J_4 \ldots J_{k-1} + \ldots + J_1J_2 \ldots J_{k-1}.$$

Azt kell igazolnunk, hogy $S(I_1, I_2, \ldots, I_n)$ főideál.

Az állítást indukcióval bizonyítjuk. $n = 2$-re az állítás triviális. Legyen most $n \geq 3$, tegyük fel, hogy kisebb n-ekre az állítás igaz, és legyen

$$F = I_1 + I_2 \quad \text{és} \quad M = S(I_1, I_3, I_4, \ldots, I_n) \cap S(I_2, I_3, I_4, \ldots, I_n).$$

A feltételek szerint F főideál. Ezenkívül bebizonyítjuk a következőket:

(1) M főideál;

(2) $S(I_1, I_2, \ldots, I_n) = FM$.

Az indukciós feltevés szerint $S(I_1, I_3, I_4, \ldots, I_n)$ és $S(I_2, I_3, I_4, \ldots, I_n)$ is főideál; az (1) igazolásához a lemma alapján elég megmutatnunk, hogy az összegük is főideál.

$$S(I_1, I_3, I_4, \ldots, I_n) + S(I_2, I_3, I_4, \ldots, I_n) =$$

$$= \big(I_1 \cdot S(I_3, \ldots, I_n) + I_3I_4 \ldots I_n\big) + \big(I_2 \cdot S(I_3, \ldots, I_n) + I_3I_4 \ldots I_n\big) =$$

$$= (I_1 + I_2) \cdot S(I_3, \ldots, I_n) + I_3I_4 \ldots I_n =$$

$$= F \cdot S(I_3, \ldots, I_n) + I_3I_4 \ldots I_n = S(F, I_3, I_4, \ldots, I_n).$$

Az $F = I_1 + I_2, I_3, \ldots, I_n$ sorozatra is teljesül, hogy bármely nem üres részhalmazának összege főideál. Az indukciós feltevés szerint tehát $S(F, I_3, I_4, \ldots, I_n)$ főideál. Ezzel az (1) állítást igazoltuk.

Mivel $I_3I_4 \ldots I_n$ szerepel az $S(I_1, I_3, I_4, \ldots, I_n)$-et és $S(I_2, I_3, I_4, \ldots, I_n)$-et definiáló összegekben,

$$I_1I_3I_4 \ldots I_n \subset I_1 \cdot \big(S(I_1, I_3, I_4, \ldots, I_n) \cap S(I_2, I_3, I_4, \ldots, I_n)\big) \subset$$

$$\subset (I_1 + I_2) \cdot \big(S(I_1, I_3, I_4, \ldots, I_n) \cap S(I_2, I_3, I_4, \ldots, I_n)\big) = FM,$$

és hasonlóan $I_2I_3I_4 \ldots I_n \subset FM$.

A lemma alapján $(I_1 + I_2) \cdot (I_1 \cap I_2) = I_1I_2$, ezért tetszőleges $3 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-3} \leq n$ esetén

$$I_1I_2I_{i_1}I_{i_2} \ldots I_{i_{n-3}} \subset I_1I_2 \cdot S(I_3, I_4, \ldots, I_n) =$$

$$= (I_1 + I_2) \cdot \big((I_1 \cap I_2) \cdot S(I_3, I_4, \ldots, I_n)\big) \subset$$

$$\subset (I_1 + I_2) \cdot \big((I_1 \cdot S(I_3, I_4, \ldots, I_n)) \cap (I_2 \cdot S(I_3, I_4, \ldots, I_n))\big) \subset$$

$$\subset (I_1 + I_2) \cdot \big(S(I_1, I_3, I_4, \ldots, I_n) \cap S(I_2, I_3, I_4, \ldots, I_n)\big) = FM.$$

Ezzel igazoltuk, hogy az $I_2I_3I_4\dots I_n$, $I_1I_3I_4\dots I_n$, $\dots$, $I_1I_2\dots I_{n-1}$ ideálok mind részei FM-nek, tehát

$$S(I_1,I_2,\dots,I_n)=I_2I_3I_4\dots I_n+I_1I_3I_4\dots I_n+\dots+I_1I_2\dots I_{n-1}\subset FM.$$

A fordított irányú tartalmazás is teljesül, mert

$$FM=\big(S(I_1,I_3,I_4,\dots,I_n)\cap S(I_2,I_3,I_4,\dots,I_n)\big)\cdot(I_1+I_2)\subset$$

$$\subset S(I_2,I_3,I_4,\dots,I_n)\cdot I_1+S(I_1,I_3,I_4,\dots,I_n)\cdot I_2\subset S(I_1,I_2,\dots,I_n).$$

Tehát $S(I_1,I_2,\dots,I_n)=FM$; ezzel (2)-t is igazoltuk, és $S(I_1,I_2,\dots,I_n)=FM$-et felírtuk két főideál szorzataként.

A feladatra Lovász László Miklós adott helyes megoldást. Tomon István megoldása hiányos.

5. feladat (Solymosi József). *Adottak a síkon a $v_1,\dots,v_n$ és $w_1,\dots,w_n$ vektorok a következő tulajdonságokkal: minden $1\le i\le n$-re $|v_i-w_i|\le 1$, valamint minden $1\le i<j\le n$ esetén $|v_i-v_j|\ge 3$ és $v_i-w_i\ne v_j-w_j$. Igazoljuk, hogy a $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ és $W=\{w_1,\dots,w_n\}$ halmazokra a $V+(V\cup W)$ összeghalmaz elemszáma legalább $cn^{3/2}$ valamely univerzális $c>0$ konstansra.*

Megoldás (Lovász László Miklós): Készítsünk el egy $n\times n$-es táblázatot, az i-edik sor j-edik eleme legyen a v_i+v_j vektor. Minden összeghez nézzük meg, hányszor fordul elő. (Ha egy összeg felírható v_i+v_j alakban, ahol $i\ne j$, akkor persze legalább kétszer szerepel.) Színezzük ki a mezőket pirossal és kékkel: egy mező legyen piros, ha a benne szereplő összeg előfordul legalább $\sqrt{n}$-szer az egész táblázatban, különben legyen kék. Két eset van: vagy van olyan sor, amiben legalább a mezők fele piros, vagy nincs. Ha nincs, akkor minden sorban van legalább $n/2$ kék mező, ez összesen legalább $n^2/2$ kék mező. Mivel minden összeg, ami valamelyik kék mezőhöz tartozik, legfeljebb $\sqrt{n}$-szer fordul elő, ez összesen legalább $1/2n\sqrt{n}$ különböző összeg, ami $V+V$-ben van.

Legyen minden i-re $u_i=w_i-v_i$. A feltételek szerint $u_i\ne u_j$, ha $i\ne j$, és $|u_i|\le 1$.

Tegyük fel akkor, hogy van olyan sor, amiben van $n/2$ piros mező. Legyen ez az i-edik sor. Ha két különböző elemét vesszük, v_i+v_j, és v_i+v_k, ezek távolsága $|v_j-v_k|\ge 3$. Tehát ez $t\ge n/2$ darab különböző összeg, legyenek ezek $S_1,S_2,\dots,S_t$. Ha $S_j\in V+V$ előáll v_l+v_k alakban, akkor $S_j+u_k=v_l+v_k+u_k=v_l+w_k\in V+W$. Legyen $H=\{S_j+u_k\mid \exists l: S_j=v_l+v_k\}$. Ekkor tehát H minden eleme benne van $V+W$-ben. Minden S_j-hez legalább $\sqrt{n}$ különböző elemet tettünk be H-ba, mivel egy S_j szerepel legalább $\sqrt{n}$-szer a táblázatban, tehát van legalább $\sqrt{n}$ olyan k, hogy létezik l, amire $v_l+v_k=S_j$. (Itt kihasználjuk, hogy egy oszlopban vagy sorban legfeljebb egyszer szerepelhet egy összeg, mivel a v_i-k különbözőek.) Mivel az u_i-k különbözők, egy S_j-hez csupa különböző elemet tettünk be, legalább $\sqrt{n}$-et. Már csak azt kell ellenőrizni, hogy különböző S_j, S_m-hez definiált elemek nem eshetnek egybe. Ez azért van, mert ekkor $|S_j-S_m|\ge 3$, de mindkettőhöz legfeljebb egy hosszú vektort adtunk hozzá, így a távolságuk még mindig legalább egy lesz. Tehát $|H|\ge 1/2n\sqrt{n}$.

Azt kaptuk, hogy vagy $V+V$, vagy $V+W$ elemszáma legalább $1/2n\sqrt{n}$. Mivel mindkettő benne van $V+(V\cup W)$-ban, $V+(V\cup W)$ elemszáma mindenképp legalább $1/2n\sqrt{n}$.

A feladatra Lovász László Miklós és Tomon István adtak helyes megoldást.

6. feladat (Buczolich Zoltán). *Létezik-e olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, melyre minden $d \in \mathbb{R}$ esetén $g_{m,d}(x) = f(x, mx + d)$ szigorúan monoton nő $\mathbb{R}$-en, ha $m \geq 0$, és egyetlen nem üres nyílt intervallumon sem monoton, ha $m < 0$?*

Megoldás (Lovász László Miklós): Létezik ilyen függvény. Először konstruálunk egy g szigorúan monoton növő, folytonos függvényt $\mathbb{R}$-en, amelynek deriváltja λ-majdnem-mindenhol nulla (nem lesz mindenhol differenciálható). A konstrukció a következő: Először $[0, 1]$-re csináljuk mértékelméleti módszerekkel. Konstruálunk egy μ mértéket, ami szinguláris λ-ra nézve, minden pont mértéke nulla, és minden nem üres belsejű intervallumnak pozitív a mértéke. Először vegyük a Cantor-halmazt. Ezen tudunk egy szinguláris μ_0 mértéket definiálni, létezik ugyanis egy megfeleltetés a $[0, 1]$-nek olyan pontjai között, amelyek nem diadikus törtek (tehát egyértelmű a kettes számrendszerben a felírásuk). Egy számnak feleltessük meg azt a számot, amit úgy kapunk, hogy vesszük kettes számrendszerben a kettedestörtalakját (ebben tehát végtelen sok 1-es és 0-s is van), ebben minden 1-est kicserélünk 2-re, majd hármas számrendszerben olvassuk le. Ekkor a Cantor-halmaz egy részhalmazának feleltessük meg a képének a mértékét. (Ez igazából a Cantor-függvényhez tartozó Lebesgue–Stieltes-mérték.) Ez szinguláris, folytonos, de nem lesz minden nem üres belsejű intervallum mértéke pozitív. Végtelen sok μ_n szinguláris, folytonos mértéket fogunk összeadni, úgy, hogy μ_n minden halmazon legfeljebb $(1/2)^n$ lesz (ez ekvivalens azzal, hogy $\mu_n([0, 1]) \leq (1/2)^n$. Ekkor az összeg is korlátos mérték lesz, és minden halmaz mértéke egyre nő, ahogy egyre többet adunk össze, de egy pont mértéke végig nulla lesz, tehát az összeg is folytonos lesz. A μ_n-et a következőképpen konstruáljuk. Az eredeti μ_0-t meg tudjuk feleltetni egy mértéknek ami $[0, (1/3)^n]$-en van, és akkor bármilyen ilyen hosszú intervallumon. Vegyük ezeket tehát minden $\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$ intervallumon, ahol $0 \leq k < 3^n$ egész. Ez szinguláris lesz, de a maximuma nem lesz $(1/2)^n$, úgyhogy osszuk le megfelelően nagy pozitív számmal, hogy ez is teljesüljön. Ekkor μ_n-re igaz, hogy $\mu_n\left(\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]\right) > 0$. Így ha ezeket összeadjuk, arra is igaz lesz, mivel mindegyik nem negatív. Legyen tehát μ az összeg, láttuk hogy minden pont mértéke nulla, és megszámlálható sok szinguláris mértéket adtunk össze, tehát az összeg is szinguláris. Legyen $a < b$, és nézzük $[a, b]$ mértékét (a szélét mindegy, hogy bevesszük-e). Mivel elég nagy n-re létezik k, hogy $\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$ benne van, ez pozitív lesz. Most ha $f(x) = \mu([0, x])$, akkor f szigorúan monoton növő, folytonos, és $f' = 0$ majdnem mindenütt (szerepelt a tananyagban, hogy $f' = 0$ majdnem mindenütt azzal, hogy a mérték szinguláris). Tehát van ilyen függvényünk $[0, 1]$-en. Ekkor van ilyen függvényünk minden egész n-re $[n, n + 1]$-en, és mivel konstans hozzáadása nem változtat a tulajdonságán, ezeket összeilleszthetjük. Legyen tehát $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ilyen függvény.

A következő tétel szerepelt a tananyagban: Ha $a < b$ valós számok, és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton növő, akkor f λ-majdnem-mindenütt differenciálható, ez az f' λ-integrálható, és az integrálja

$$\int_a^b f' d\lambda \leq f(b) - f(a).$$

Továbbá itt akkor és csak akkor van egyenlőség, ha f abszolút folytonos.

Vizsgáljuk g-t. Azt látjuk be, hogy tetszőleges $[a, b]$, $a < b$ intervallumban és tetszőleges $K > 0$-hoz léteznek olyan $c_1 < c_2$ pontok, hogy $\frac{g(c_2) - g(c_1)}{c_2 - c_1} > K$. Ha ugyanis nem, akkor g, az $[a, b]$ intervallumon Lipschitz lenne, tehát abszolút folytonos lenne. Viszont ez ekvivalens azzal, hogy

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Itt a bal oldal biztosan nulla, hiszen majdnem mindenütt nulla, de ez ellentmondás, mert f szigorúan monoton növő.

Legyen $f(x,y) = x + g(y)$. Ekkor ha $m \geq 0$, akkor $f(x, mx+d) = x + g(mx+d)$; itt x szigorúan monoton növő, $g(mx+d)$ konstans, ha $m = 0$, szigorúan monoton növő, ha $m > 0$. Mindenképpen az összeg szigorúan monoton növő. Legyen $m < 0$, és nézzük a $h(x) = h_{m,d}(x) = x + g(mx+d)$ függvényt. Tegyük fel, hogy egy $[a,b]$, $a < b$ intervallumon monoton (a feladatban nyílt, nem üres intervallum szerepel, de ez mindegy, nézhetjük a nem üres belsejű zárt intervallumokat). Két eset van: monoton növő, vagy monoton csökkenő. g-t az $[mb+d, ma+d]$ intervallumon kell vizsgálni (mivel $a < b, m < 0 \to mb < ma \to mb + d < ma + d$). Van olyan $c \in (mb+d, ma+d)$-ben (majdnem minden pont ilyen), ahol $g'(c) = 0$. Mivel $mx + d$ lineáris, nyilván van (egyetlen) $x \in (a,b)$, hogy $mx + d = c$. Ekkor $h'(x) = 1 + g'(mx+d)m = 1$. Ekkor h nem lehet monoton csökkenő $[a,b]$-n, tehát monoton növő. Azonban legyen $K = -1/m$, K tehát pozitív. Van tehát olyan $mb + d \leq c_1 < c_2 \leq ma + d$, hogy

$$\frac{g(c_2) - g(c_1)}{c_2 - c_1} > K \longleftrightarrow g(c_2) - g(c_1) > K(c_2 - c_1).$$

Mivel $mx + d$ lineáris, és m negatív, léteznek egyértelműen $x_1 < x_2$, hogy $mx_1 + d = c_2$, $mx_2 + d = c_1$. Ekkor

$$\begin{aligned} h(x_2) - h(x_1) &= x_2 - x_1 + g(mx_2 + d) - g(mx_1 + d) = \\ &= x_2 - x_1 + g(c_1) - g(c_2) < x_2 - x_1 + K(c_1 - c_2) = \\ &= x_2 - x_1 + 1/m(c_2 - c_1) = x_2 - x_1 + x_1 - x_2 = 0. \end{aligned}$$

Tehát $h(x_2) - h(x_1) < 0$, vagyis h nem is monoton növő. Ez ellentmondás, vagyis h semmilyen intervallumon sem monoton. Tehát az $f(x,y) = x + g(y)$ függvény valóban jó lesz.

A feladatra Lovász László Miklós adott helyes megoldást.

7. feladat (Buczolich Zoltán, Julien Brémont). *Van-e olyan $a_n \geq 0$, ℓ^2-beli sorozat, melyre*

$$\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k\geq 1}\frac{a_{kn}}{k}\right)^2 = +\infty?$$

Megoldás (Buczolich Zoltán megoldása alapján): Van ilyen sorozat. Minden $M \in \mathbb{N}$ esetén válasszuk ki különböző prímek egy $\mathcal{P}_M = \{p_{j,M} : j = 1, \ldots, l_M\}$ halmazát. Különböző M-ekre legyenek ezek a halmazok diszjunktak. Továbbá, kihasználva, hogy $\sum_{p \text{ prím}} \frac{1}{p} = \infty$, úgy választjuk a $\mathcal{P}_M$-eket, hogy

$$\sum_{j=1}^{l_M} \frac{1}{p_{j,M}} > \sqrt{2}M. \tag{10}$$

Ezután válasszuk m_M-et úgy, hogy

$$\frac{(m_M - 1)^{l_M}}{m_M^{l_M}} > \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Legyen $N_M = \{p_{1,M}^{a_1} \cdots p_{l_M,M}^{a_{l_M}} : 1 \leq a_j \leq m_M,\ j = 1, \ldots, l_M\}$, és

$$N'_M = \{p_{1,M}^{a_1} \cdots p_{l_M,M}^{a_{l_M}} : 1 \leq a_j \leq m_M - 1,\ j = 1, \ldots, l_M\}.$$

Az N_M halmazok különböző M-ekre diszjunktak, és $\#N_M = m_M^{l_M}$, és $\#N'_M = (m_M - 1)^{l_M}$.

Ha $n \in N_M$ akkor legyen $a_n = \frac{1}{M\sqrt{m_M^{l_M}}}$. Ha pedig $n \notin \cup_M N_M$, akkor legyen $a_n = 0$.

Ekkor könnyen látható, hogy $(a_n) \in \ell_2$.

Továbbá,

$$\sum_{n\geq 1}\Big(\sum_{k\geq 1}\frac{a_{kn}}{k}\Big)^2 \geq \sum_{M=1}^{\infty}\sum_{n\in N'_M}\Big(\sum_{k\geq 1}\frac{a_{kn}}{k}\Big)^2 \geq$$

$$\geq \sum_{M=1}^{\infty}\sum_{n\in N'_M}\Big(\sum_{k\in \mathcal{P}_M}\frac{a_{kn}}{k}\Big)^2 = \sum_{M=1}^{\infty}\sum_{n\in N'_M}\frac{1}{M^2 m_M^{l_M}}\Big(\sum_{j=1}^{l_M}\frac{1}{p_{j,M}}\Big)^2 \geq$$

(kihasználva (10)-et és aztán (11)-et)

$$\geq \sum_{M=1}^{\infty}\sum_{n\in N'_M}\frac{2}{m_M^{l_M}} = \sum_{M=1}^{\infty}\frac{2(m_M-1)^{l_M}}{m_M^{l_M}} \geq \sum_{M=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

A feladatra nem született helyes megoldás.

8. feladat (Halász Gábor, Lempert László). *Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ véges Lebesgue-mértékű, összefüggő nyílt halmaz, és $u : D \to \mathbb{R}$ harmonikus függvény. Mutassuk meg, hogy vagy u konstans, vagy pedig majdnem minden $p \in D$-re az*

$$f'(t) = (\operatorname{grad} u)\big(f(t)\big), \quad f(0) = p$$

kezdetiérték-problémának nincsen (mindenütt differenciálható) $f : [0,\infty) \to D$ megoldása.

Megoldás (a kitűzők megoldása alapján): A feladatot általánosabban $\mathbb{R}^n$-ben oldjuk meg. Előrebocsátjuk, hogy a differenciálegyenlet jobb oldala lokálisan Lipschitz lévén, ha a fenti kezdetiérték-problémának (röviden: k.é.p.-nek) van megoldása egy $[0, T]$ intervallumon, akkor az a megoldás egyértelmű. A továbbiakban a fenti k.é.p.-re (K)-ként hivatkozunk. Legyen D_∞ azon $p \in D$ pontok halmaza, amikre (K)-nak van $x : [0,\infty) \to D$ megoldása.

1. lemma. *D_∞ mérhető.*

Bizonyítás. Azt látjuk be, hogy tetszőleges T-re azon $p \in D$ pontok D_T halmaza, amelyekre (K)-nak van $x : [0,T] \to D$ megoldása, ez a D_T halmaz mérhető (valójában nyílt is). Ha $K \subset D$ kompakt, válasszunk egy $\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sima vektormezőt, ami megegyezik $\operatorname{grad} u$-val K-n, és 0 D egy kompakt részén kívül. Mivel ξ tartója kompakt, a

$$dy/dt = \xi(y), \qquad y(0) = p$$

k.é.p. -nek tetszőleges $p \in \mathbb{R}^n$-re van $y = y_p : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ megoldása, és az

$$\mathbb{R}^n \times [0,\infty) \ni (p,t) \mapsto y_p(t) \in \mathbb{R}^n$$

leképezés folytonos. Nyilván D_T azon p pontokból áll, amikre valamely kompakt $K \subset D$-vel $y_p[0,T] \subset K$. Ez utóbbi halmaz pedig $K_T = \bigcap_j \{p : y_p[0,T] \subset G_j\}$ – ahol G_j a K egy nyílt környezetbázisa –, vagyis nyílt halmazok megszámlálható metszete. Választva D-beli kompakt halmazoknak egy K^i megszámlálható bázisát, kapjuk, hogy

$$D_T = \bigcap_i K_T^i \quad \text{és így} \quad D_\infty = \bigcap_{T=1}^{\infty} D_T$$

is mérhető. ■

Mivel a $\operatorname{grad} u$ vektormező divergenciája $= \Delta u = 0$, azért a lokális folyama mértéktartó; ez a lokális folyam D_∞-t önmagába képezi, és így megszorítása D_∞-en mértéktartó és injektív transzformációk egy $g_t : D_\infty \to D_\infty$ családját adja, $0 \le t < \infty$.

$$du\big(g_t(p)\big)/dt = \big(\operatorname{grad} u\big(g_t(p)\big), dg_t(p)\big) = \big|\operatorname{grad} u\big(g_t(p)\big)\big|^2 \tag{12}$$

miatt u monoton nő a trajektóriák mentén.

Ha a feladat állítása nem lenne igaz, akkor $\operatorname{grad} u \neq 0$ m.m. és $\mu(D_\infty) > 0$. Válasszuk ki D_∞-nek egy olyan q Lebesgue-sűrűségi pontját, ahol $\operatorname{grad} u$ nem 0, és tekintsük az $E = \{p \in D_\infty : u(p) \ge u(q)\}$ halmazt. Az implicit függvény tétel szerint $\{q' \in D : u(q') = u(q)\}$ sima hiperfelület lesz q egy környezetében, amiért is $\mu(E) > 0$ (másképpen q nem lehetne sűrűségi pont). Mivel u növekszik a trajektóriák mentén, $g_1(E) \subset E$. Sőt, (12) szerint a növekedés szigorú q egy környezetében. Következésképpen q külső pontja $g_1(E)$-nek, tehát $\mu\big(g_1(E)\big) < \mu(E)$. Ez azonban ellentmond annak, hogy g injektív és mértéktartó.

A feladatra Lovász László Miklós adott lényegében helyes megoldást, apró hibával.

9. feladat (Szűcs András). *Minden M m-dimenziós, zárt C^∞ sokasághoz rendeljünk hozzá egy $G(M)$, $2m$-dimenziós, zárt C^∞ sokaságot a következőképpen. Ágyazzuk be M-et valamilyen $\mathbb{R}^q$ euklideszi térbe. Jelölje $\mathbb{RP}^q$ a q-dimenziós valós projektív teret. A $G(M) \subseteq M \times \mathbb{RP}^q$ sokaság az olyan (x, e) párokból áll, amelyekre $x \in M \subseteq \mathbb{R}^q$, és az $e \subseteq \mathbb{R}^{q+1} = \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ egydimenziós lineáris altér benne van a $T_xM \subseteq \mathbb{R}^q \subset \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ érintőtér és a $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{q+1}$ vektor által kifeszített $(m+1)$-dimenziós lineáris altérben. Bizonyítsuk be, hogy ha N egy n-dimenziós zárt C^∞ sokaság, akkor $P = G(M \times N)$ és $Q = G(M) \times G(N)$ kobordánsak, azaz létezik egy $(2m + 2n + 1)$-dimenziós kompakt, peremes C^∞ sokaság, amelynek pereme P és Q diszjunkt uniója.*

Megoldás (A kitűző megoldása alapján): Emlékeztető: Két zárt C^∞ n-dimenziós sokaság kobordáns, ha létezik egy $(n+1)$-dimenziós kompakt peremes sokaság, melynek pereme a két n-dimenziós sokaság diszjunkt uniója. Ez egy ekvivalenciarelációt definiál az n-dimenziós zárt sokaságok halmazán. Az ekvivalenciát $\sim$ fogja jelölni. Az ekvivalenciaosztályok N_n halmazát n-dimenziós kobordizmuscsoportnak nevezzük. Az összeadást a sokaságok diszjunkt uniója definiálja. Az N_n csoportok direkt összegén a sokaságok szorzása definiál egy szorzást, ez lesz a kobordizmusgyűrű.

A bizonyításban tekintett minden sokaság zárt C^∞ sokaság lesz, és minden diffeomorfizmus C^∞ lesz, ezt a továbbiakban nem írjuk ki.

2. lemma. *$G(M)$ kobordáns M^2-tel.*

A lemmából nyilvánvaló a feladat állítása, ugyanis: $G(M \times N) \sim (M \times N)^2 = M^2 \times N^2 \sim G(M) \times G(N)$.

A lemma bizonyítása. A definíció alapján $G(M) = P(TM \oplus E^1)$, ahol E^1 az $M \times \mathbb{R}$ triviális nyaláb, és P a projektivizálást jelöli (a feladat szövege szerinti értelemben, tehát a szokásos ideális pontok hozzávételével). Ekkor van egy $P(TM \oplus E^1) \to M$ fibrálás, $\mathbb{RP}^m$ fibrumokkal.

A lemma bizonyítása egyszerű geometriai konstrukcióval történik. Tekintsük az $M^2 \times [-1, 1]$ peremes sokaságot. Ezen tekintsük a következő T involúciót: $(x, y, t) \mapsto (y, x, -t)$. Ennek fixponthalmaza $\{(x, x, 0) \mid x \in M\}$, ami diffeomorf az M sokasággal. Tekintsük a fixponthalmaznak egy kis T-invariáns csőszerű nyílt U környezetét, amelynek határa diffeomorf az $S(TM \oplus E^1)$ gömbfelszínnyalábbal. Ekkor $M^2 \times [-1, 1] \setminus U$ egy T-invariáns peremes sokaság, amelynek pereme $[M^2 \times \{-1, 1\}] \cup \partial U$. Ezt a peremes sokaságot faktorizálva a T hatása szerint, kapunk egy kobordizmust M^2 és $P(TM \oplus E^1)$ között.

A feladatra nem született helyes megoldás.

10. feladat (Major Péter, Elekes Márton). *Tekintsük a $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ teret a szorzattopológiával (ahol $\{0,1\}$ diszkrét tér). Legyen $T : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ a bal-eltolás, azaz $(Tx)(n) = x(n+1)$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Megadható-e véges sok Borel-halmaz: $B_1, \ldots, B_m \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ úgy, hogy a*

$$\{T^i(B_j) \mid i \in \mathbb{N},\ 1 \le j \le m\}$$

halmazrendszer által generált σ-algebra egybeesik a Borel-halmazok rendszerével?

Megoldás (Elekes Márton megoldása alapján): Nem adhatók meg ilyen B_j halmazok. Ezt indirekt bizonyítjuk.

Ismert (pl. Laczkovich: Valós függvénytan), hogy $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ teljes metrikus tér, így érvényes benne a Kategória-tétel, valamint, hogy a tér szeparábilis is. (Valójában homeomorf a Cantor-halmazzal, de ezt nem használjuk.) Emlékeztetőül, egy halmaz első kategóriájú, ha előáll megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként. Jelölje $\mathcal{M}$ az első kategóriájú halmazok rendszerét. $\mathcal{M}$ nyilván zárt a részhalmazképzésre és a megszámlálható unióra.

1. lemma. $B \in \mathcal{M} \Rightarrow T(B) \in \mathcal{M}$.

Bizonyítás. Könnyen látszik abból, hogy

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid x(0) = 0\} \cup \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid x(0) = 1\}$$

alakba írható, és T mindkét részen homeomorfizmus. ■

2. lemma. $B \notin \mathcal{M}$, *B Borel* $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall i \ge N\ \ \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus T^i(B) \in \mathcal{M}$.

Bizonyítás. Ismert (pl. Laczkovich: Valós függvénytan), hogy ha egy teljes szeparábilis metrikus térben egy Borel-halmaz nem első kategóriájú, akkor valamely nem üres nyíltat első kategóriájú híján tartalmaz. Itt nyilván mondhatunk bázisnyíltat is, hiszen $\mathcal{M}$ lefelé zárt.

Tehát $U \setminus B \in \mathcal{M}$ valamely U bázisnyíltra. A szorzattopológia definíciója alapján legyen $U = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid x(0) = i_0, \ldots, x(m) = i_m\}$ alakú, valamely $i_0, \ldots, i_m \in \{0,1\}$ számokra. Ekkor könnyű látni, hogy $T^i(U) = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ minden $i \ge m+1$-re. De ekkor $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus T^i(B) = T^i(U) \setminus T^i(B) \subset T^i(U \setminus B) \in \mathcal{M}$ minden $i \ge m+1$-re, így $N := m+1$ megfelel. ■

$B_j \in \mathcal{M}$ esetén az 1. lemma ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy $T^i(B_j) \in \mathcal{M}$ minden i-re. $B_j \notin \mathcal{M}$ esetén pedig a 2. lemma alapján $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus T^i(B_j) \in \mathcal{M}$ véges sok i kivételével. A három típusú halmazt három csoportba gyűjtve adódik, hogy $\{T^i(B_j) \mid i \in \mathbb{N},\ 1 \le j \le n\} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{E}$ alakba írható, ahol $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ megszámlálható, $\mathcal{E}$ véges, $\forall C \in \mathcal{C}$ esetén $C \in \mathcal{M}$, és $\forall D \in \mathcal{D}$ esetén $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus D \in \mathcal{M}$.

Legyen $X = \cup_{C\in\mathcal{C}} C \cup \cup_{D\in\mathcal{D}} \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus D$. Ekkor $X \in \mathcal{M}$. Legyen $Y = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus X$. A Kategória-tételből következik, hogy Y végtelen, hiszen különben $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ első kategóriájú lenne. Könnyű látni, hogy az $\{A \cap Y \mid A \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{E}\}$ halmazrendszer által generált σ-algebra tartalmazza $\{y\}$-t minden $y \in Y$-ra. De ez a σ-algebra véges, mivel $A \cap Y = \emptyset$ minden $A \in \mathcal{C}$-re, $A \cap Y = Y$ minden $A \in \mathcal{D}$-re, $\mathcal{E}$ véges, és egy véges halmazrendszer véges σ-algebrát generál. Ellentmondás.

A feladatra nem született helyes megoldás.

11. feladat (Székely Gábor). *Az X és Y valós értékű véletlen változók maximálkorrelációja az $f(X)$ és $g(Y)$ változók korrelációjának szuprémuma az olyan f és g Borel-mérhető, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeken, amelyekre $f(X)$ és $g(Y)$ véges szórású. Legyen U a $[0, 2\pi]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, valamint n és m pozitív egészek. Számítsuk ki $\sin(nU)$ és $\sin(mU)$ maximálkorrelációját.*

Megoldás (Lovász László Miklós): Minden n-re létezik olyan f_n Borel-mérhető függvény, hogy $f_n(\sin(\alpha)) = |\sin(n\alpha)|$. Ugyanis létezik az U_{n-1} Csebisev-polinom, ami $n-1$-ed fokú, csupa azonos paritású tag van benne, és $\sin(n\alpha) = \sin(\alpha)U_{n-1}(\cos(\alpha))$. Legyen $f_n(x) = |xU_{n-1}(\sqrt{1-x^2})|$, ha $-1 \le x \le 1$, egyébként bármi, hogy Borel-mérhető legyen. (Ez lehetséges, mert $[-1,1]$-en folytonos, így akár úgy is választható, hogy az egész $\mathbb{R}$-en folytonos legyen.) Ekkor $f_n(\sin(\alpha)) = |\sin(\alpha)| \cdot |U_{n-1}(|\cos(\alpha)|)|$. Mivel U_{n-1}-ben csupa azonos paritású tag van, a függvény maga vagy páros, vagy páratlan, így $|U_{n-1}(|x|)| = |U_{n-1}(x)|$. Ebből

$$f_n(\sin(\alpha)) = \left|\sin(\alpha)U_{n-1}(|\cos(\alpha)|)\right| = \left|\sin(\alpha)U_{n-1}(\cos(\alpha))\right| = |\sin(n\alpha)|.$$

Ekkor ha nézzük $f_m(\sin(nU))$ és $f_n(\sin(mU))$-t, mindkettő $|\sin(mnU)|$-val egyenlő. Mivel m, n pozitív egészek, mnU egyenletes eloszlású $[0, 2\pi mn]$-en. Ekkor $|\sin(mnU)|$ véges, nem nulla szórású, mivel az abszolút értéke mindenhol legfeljebb egy. Azt kaptuk, hogy ha $X = \sin(nU)$, $Y = \sin(mU)$, akkor léteznek olyan f, g Borel-mérhető függvények, amelyekre $f(X) = g(Y)$, és mindkettő véges, nem nulla szórású. De ekkor ezek korrelációja is egy, és mivel minden korreláció legfeljebb egy, ezért a maximálkorrelációjuk egy.

A feladatra Lovász László Miklós adott helyes megoldást.

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

Nagy és Társa Nyomda és Kiadó Kft., Budapest

Matematikai Lapok

2011/2

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként kétszer.

Új sorozat 17. évfolyam (2011), 2. szám

ISSN 0025-519X

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. Telefon: 225-8410.

Ára:
- A Bolyai János Matematikai Társulat tagjainak ingyenes
- nem társulati tagoknak egy évfolyam 2464 Ft (ÁFÁ-val).

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

A Matematikai Lapok megjelenését támogatja a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

GEOGEBRA – TÖBBET ÉSSZEL, MINT ERŐVEL

MIKLÓS ILDIKÓ

Már Magyarországon is egyre többen használjuk a GeoGebra dinamikus szerkesztőprogramot. Nem véletlen, hogy többi interaktív programmal szemben ez terjed el a legszélesebb körben.

Miért éppen a GeoGebra?

1. Ingyenes. A `www.geogebra.org` oldalról bárki ingyen letöltheti, ha a saját számítógépén akarja használni. Ha nincs lehetőség a letöltésre, akkor webes felületen is futtatható, csak egy Java kell hozzá.

2. Magyar nyelvű. Pontosabban nemcsak magyar nyelvű, hanem nagyon sok nyelven hozzáférhető. A GeoGebra honlapjáról juthatunk el a GeoGebraTube oldalra [1], illetve elődjére, a Wiki oldalra [2]. Mindkét helyen rengeteg segítséget találunk a program használatához. Nemcsak a program leírását olvashatjuk el, hanem nagyon sok segédanyagot, szakdolgozatot, példamegoldást is.

3. Platformfüggetlen. A legelterjedtebb operációs rendszerek alatt fut, letöltve is, webes felületen is.

4. Gyorsan fejlődik. 2011 augusztusában bocsátották ki a 4-es verziót, de az 5-ös verzió (amely már 3 dimenzióban is tud ábrát készíteni) béta változata is elérhető már.

5. Többféle kimenete van. A kész ábrákat több fájlformátumban is el tudjuk menteni. A LaTeX-et használóknak az eps vagy a pstricks kimenet a hasznos, de pixelgrafikus kimenete is van. Ha nem akarunk exportálni, akkor akár egyből, vágólapon keresztül beilleszthető az ábra egy dokumentumba. Készíthetünk applet kimenetet is, amivel az interaktív ábrát be lehet illeszteni egy honlapra.

6. Sokféleképpen lehet feliratot készíteni. A pontokhoz, egyenesekhez, egyéb objektumokhoz nemcsak egykarakteres betűket rendelhetünk, hanem indexelt, vagy vesszővel ellátott, hosszabb neveket is. A rajzlapon elhelyezhetünk képleteket, ezek elkészítéséhez minimális LaTeX-ismeretre van szükség. Ezekbe a képletekbe változó adatokat is beilleszthetünk, így az ábránk változtatásával a képletben levő érték is változni fog.

7. Könnyen szerkeszthető. Egyéb népszerű, elterjedt, de nem dinamikus programokkal szemben (Word, Paint stb.) a kapott ábra pontos lesz. Ha az eredményül kapott ábránk nem tetszik, mert úgy érezzük, nem úgy illusztrálja a feladatot, ahogy szeretnénk, könnyen megváltoztathatjuk.

8. Dinamikus. Egy alapadat, vagy egy szabad objektum helyének megváltoztatásával új, ugyancsak pontos és helyes ábrát, számítást kapunk. Megváltoztatható például egy pont helyzete vagy egy függvény paramétere(i).

9. Sok a beállítási lehetőség. Megváltoztatható a betűméret, a pontok és vonalak stílusa, a színek stb., így látványos, színes ábrákat készíthetünk.

10. Szakterületek. Sokféle szakterületen alkalmazható a program: a matematikán belül a geometria (síkgeometria, transzformációk, trigonometria, koordinátageometria), a függvények, a függvény-transzformációk, az egyenletek, a komplex számok, a statisztika, vagy a valószínűségszámítás területén csakúgy, mint a fizikában.

11. „Extrák”. Megrajzolja egy pont mértani helyét; lejátszhatjuk a szerkesztés lépéseit; vagy animáció is készíthető.

Ezzel a lista nincs kész! Aki elkezd ismerkedni a programmal, hamar megtapasztalja, mennyi egyéb előnye van.

Fontos a pontosság

Amikor egy geometriai feladathoz megpróbálunk ábrát rajzolni, előfordulhat, hogy nehézségekbe ütközünk: az ábra első nekifutásra nem felel meg minden feltételnek. Ha a GeoGebra programmal készítjük el az ábrát, kihasználhatjuk a dinamikus program előnyeit: a pontok mozgatásával készíthetünk „szemre” megfelelő illusztrációt. Ám ez nem pontos szerkesztés! Célunk legyen egy olyan ábra készítése, amely mindig magán hordozza a feladat követelményeit, akkor is, ha a pontokat elmozdítjuk.

El kell sajátítani a helyes gondolkodásmódot egy ábra készítésekor. Úgy kell gondolkodnunk, mintha egy papír feküdne előttünk, és rendelkezésünkre állna egy körző és egy vonalzó. A GeoGebra programmal is így kell dolgoznunk, kihasználva a program adta előnyöket, amelyek leegyszerűsítik a szerkesztést.

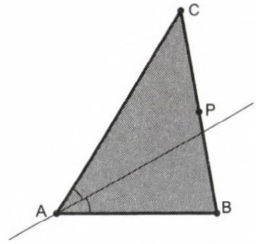
Nézzünk ehhez egy feladatot, amely a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok (KöMaL) 2008. januári számában került kitűzésre:

B. 4061. *Adott az ABC és PQR háromszög úgy, hogy az A pont felezi a QR, a P pont a BC oldalt. A QR egyenes felezi a BAC, a BC egyenes a QPR szöget. Bizonyítsuk be, hogy*

$$AB + AC = PQ + PR.$$

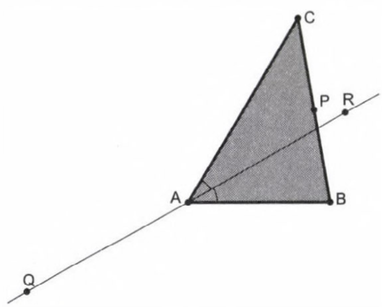
Anélkül, hogy a feladatot megoldanánk [3], készítsünk hozzá ábrát a GeoGebra segítségével, odafigyelve a geometriai gondolkodásmódra!

Vegyünk föl egy tetszőleges ABC háromszöget a (Sokszög) ikon segítségével. Rajzoljuk meg a BC szakaszt felező P pontot (– Felező vagy középpont), majd az A pontból kiinduló szögfelezőt (– Szögfelező) (*1. ábra*). Vegyünk föl egy



1. ábra

tetszőleges R pontot a szögfelezőn (– Új pont) ügyelve arra, hogy a pont valóban a szögfelezőn legyen. Ezt úgy érhetjük el, hogy a pont felvételekor a szögfelező fölé visszük az egérmutatót, ekkor a szögfelezőt vastagabbnak látjuk, az egérmutató pedig + jelből nyíllá alakul át. (Ez minden függő objektum felvételekor nagyon fontos: mindig figyeljünk oda, hogy valóban az a pont, egyenes stb. legyen vastagabb, amihez rendeljük az új alakzatot!) Ezután az R pontot mozgathatjuk ugyan, de csak a szögfelezőn. Következő lépésként tükrözzük az R pontot az A pontra (– Centrális tükrözés), így megkapjuk a Q pontot (*2. ábra*).

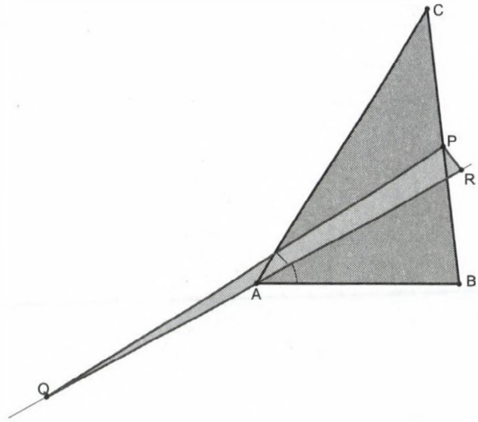


2. ábra

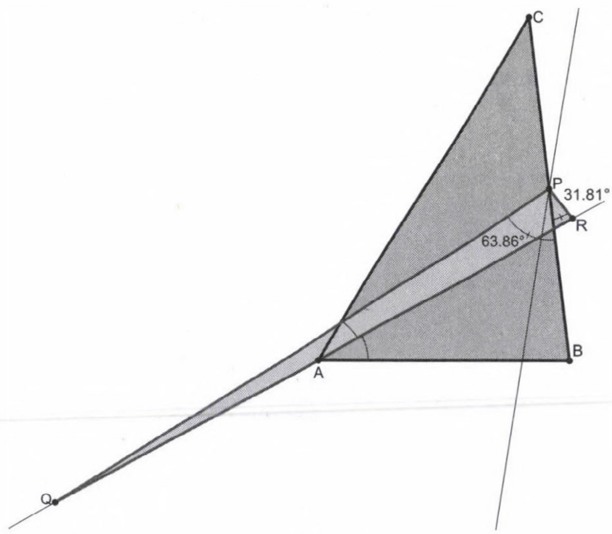
Ekkor már rendelkezésünkre áll a PQR háromszög három csúcspontja, a már ismert ikon segítségével meg is rajzolhatjuk azt (*3. ábra*).

Kérdés, hogy ekkor a kapott PQR háromszög megfelel-e a kitűzött feladat azon feltételének, mely szerint a BC egyenes felezi az RPQ szöget? Szemmel láthatóan nem, de ezt ellenőrizhetjük is, ha megrajzoljuk a ikonnal az RPQ szög felezőjét. Még pontosabb eredményt kapunk, ha megjelöljük az RPB és BPQ szögeket (– Szög), ekkor a GeoGebra kiírja azok nagyságát is (*4. ábra*).

Most már látjuk, hogy ez az ábra így nem megfelelő. Próbálkozhatunk a pontok mozgatásával annak érdekében, hogy úgy tűnjön, az ábránk mégis jó. Ennek érdekében a szabad pontokat (A, B, C), illetve a szögfelezőtől függő R pontot

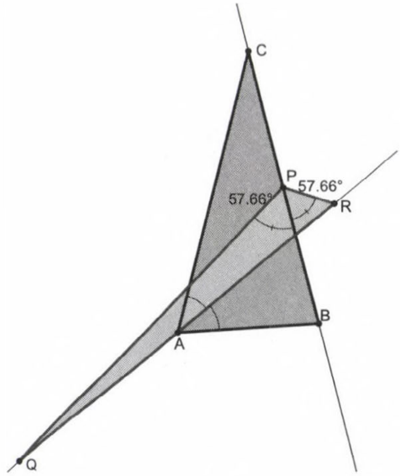


3. ábra

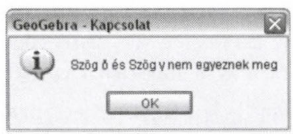


4. ábra

mozgathatjuk (– Mozgatás). Ha az ábrát megfelelőképpen kinagyítjuk, elérhetjük, hogy „szemre" az A és a B pont az RPQ szög felezőjén legyen, sőt, a két szög nagyságát is két tizedes jegy pontosságra egyenlőnek látjuk (*5. ábra*). Ezt leellenőrizhetjük (– Kapcsolat két alakzat között), ekkor a látszólagos pontosság ellenére az egyenletekkel és koordinátákkal pontosan számoló GeoGebra közli velünk, hogy a két szög nem egyezik meg (*6. ábra*). Tehát az ábránk mégsem megfelelő, ráadásul, ha ekkor bármelyik mozgatható pont helyzetét megváltoztatjuk, már látszatra sem lesz az.



5. ábra



6. ábra

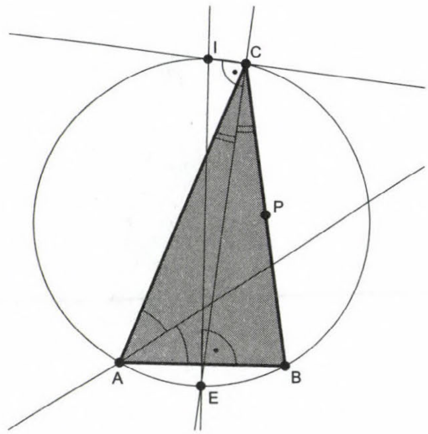
Mi tehát a helyes út? Hol rontottuk el? Nyilvánvalónak látszik, hogy az R pont fölvételekor követtük el a hibát. Geometriai összefüggéseket kell keresnünk, hogy ábránk pontos legyen. Gondolkodjunk!

Ábránk megrajzolását ugyanúgy kezdjük el, mint az előbb (*1. ábra*); majd fölhasználunk két segédpontot.

Rajzoljuk meg az ABC háromszög köré írt kört (- Köré írt kör), a BCA szög felezőjét (), valamint az AB szakasz felezőmerőlegesét (- Szakaszfelező); e két utóbbi egyenes metszéspontja (- Két alakzat metszéspontja) legyen az E pont (*7. ábra*). Az E pont rajta van a háromszög körülírt körén, mert a kisebbik AB ívet felezi az előbb fölvett szögfelező és szakaszfelező is.

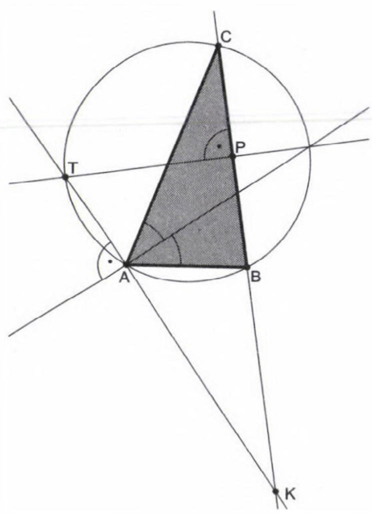
A C-ben a szögfelezőre állított merőleges (- Merőleges, ez a háromszög külső szögfelezője) és az AB szakasz felezőmerőlegesének metszéspontja () legyen I. A körülírt körben az EI egyenes átmérő, mert oldalfelező merőleges. Az ECI szög derékszög, tehát a körülírt kör egyben az IEC derékszögű háromszög Thalész-köre is. Így az I pont is rajta van a körülírt körön.

Keressünk most hasonló tulajdonságokkal rendelkező pontokat a PQR háromszöghöz is. A PQR háromszögnek ismerjük egy csúcspontját (P), egy oldalfelező pontját (A) és egy szögfelezőjét (BC szakasz). A P pontban a BC szakaszra állított merőleges () és az A pontban az ABC háromszög szögfelezőjére állított merőleges () T metszéspontja () ugyanolyan tulajdonságú a PQR három-



7. *ábra*

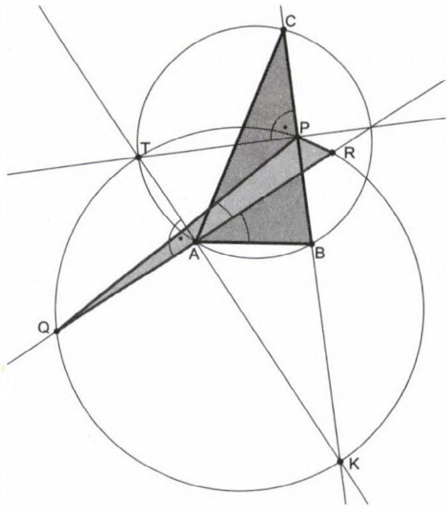
szögben, mint az I pont az ABC háromszögben, tehát rajta van a PQR háromszög körülírt körén. (A T pont mellesleg ugyanilyen tulajdonsággal rendelkezik az ABC háromszöggel kapcsolatban is, tehát rajta van e háromszög körülírt körén is.) A BC szakasz meghosszabbítása (– Egyenes két ponton keresztül) a PQR háromszög szögfelezője, így ennek az A pontban az ABC háromszög szögfelezőjére állított merőlegessel vett K metszéspontja () ugyanolyan tulajdonságú a PQR háromszögben, mint az E pont az ABC háromszögben, tehát ugyancsak rajta van a PQR háromszög körülírt körén (*8. ábra*).



8. *ábra*

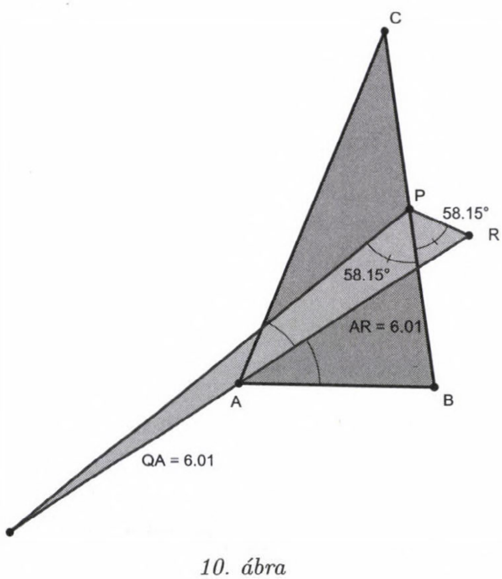
A három pont (P, T, K) ismeretében a kört már meg tudjuk rajzolni ().
Az ABC háromszög A-nál levő szögfelezője a PQR háromszög oldalegyenese, így

a körülírt körrel való két metszéspontja ( ) lesz a háromszög Q és R csúcspontja (*9. ábra*). Az eddigiek alapján a PQR háromszög megfelel a feladat feltételeinek,



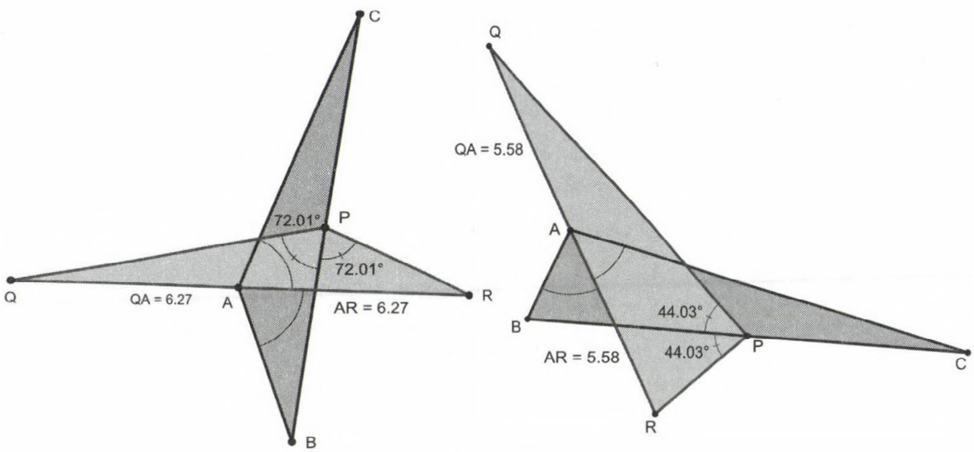
9. ábra

de hogy biztosak legyünk, ezt le is ellenőrizhetjük (– Távolság, illetve $\overset{?}{a=b}$): $QA = AR$ és $RPB\sphericalangle = BPQ\sphericalangle$ (*10. ábra*).



10. ábra

Most már azt is kihasználhatjuk, hogy a GeoGebra dinamikus: az A, B, C pontokat mozgatva mindig helyes ábrát fogunk kapni (*11. ábra*).



11. ábra

Ez természetesen csak egy példa volt a helyes szerkesztésre. További meggondolást igényel, hogy létezik-e olyan szerkesztés, amelynél nem az A, B, C pontok lesznek a szabad pontok, hanem esetleg a három szabad pont megoszlik a két háromszög között.

Köszönetnyilvánítás. Köszönettel tartozom Nagy Gyulának, a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok főszerkesztőjének a megoldáshoz nyújtott szóbeli segítségéért.

Irodalom

[1] `http://www.geogebratube.org/`

[2] `http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/Hungarian`

[3] **B. 4061.** feladat megoldása, *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok,* **59(4)** (2009. április), 211–214.
`http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=B4061&l=hu`.

Ildikó Miklós: GeoGebra – More brain than brawn

As a co-worker at Mathematical and Physical Journal for Secondary Schools, one of my tasks is to prepare the solutions for the published problems. When we try to draw a figure associated with some problem, we may face difficulties: in some cases the first try does not meet all requirements. If we use the dynamical GeoGebra program, we can make use of its advantages: by moving the points we can form a seemingly good picture. However, this is not an exact construction. Our aim should be to create figures which always comply with the requirements of the problem, even if we move the points.

Miklós Ildikó
Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok
miklosildiko@komal.hu

PONTHALMAZOK FEDÉSE MONOTON UTAKKAL

TOMON ISTVÁN

1. Bevezetés

A síkbeli rácspontok egy véges sorozatát monoton útnak hívjuk, ha a sorozatot szomszédos pontok alkotják, és csak jobbra és felfelé, vagy csak jobbra és lefelé haladunk. Ebben a dolgozatban azt vizsgáljuk, hogy a rácspontok egy véges halmazát hogyan lehet minél kevesebb monoton út uniójára szétbontani, vagy ilyenekkel lefedni. Ezt a kérdés sokféleképpen vizsgálhatjuk. Először becslést adunk arra, hogy egy általános rácsponthalmazban mi az optimális fedés. A későbbiekben pedig bizonyos speciális ponthalmazokat tanulmányozunk.

A rácspontoknak egyik ilyen vizsgált osztálya a téglalaprácsok, ugyanis ezekben viszonylag szabályosan viselkednek a monoton utak (pl. ha egy monoton út két végpontja benne van egy téglalaprácsban, akkor a teljes út is benne van, így könnyen lehet becsülni a lefedett pontok számát). Ekkor pontos eredményeket tudunk adni az optimális fedés kérdésére.

A másik vizsgált osztály pedig a konvex rácsponthalmazok osztálya, amelyek olyan halmazok, melyek valamely konvex sokszög által lefedett rácspontok. Ezek optimális fedésének vizsgálatakor kihasználhatjuk a konvex sokszögek néhány geometriai tulajdonságát, ezzel erősebb becsléseket kapva.

2. Monoton utak és tulajdonságaik

1. definíció. A rácspontok egy $X_1, X_2, \dots, X_n$ sorozatát monoton növekvő útnak nevezzük, ha $X_{i+1} = X_i + (1,0)$ vagy $X_{i+1} = X_i + (0,1)$ és monoton csökkenő útnak, ha $X_{i+1} = X_i + (1,0)$, vagy $X_{i+1} = x_i + (0,-1)$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$. Monoton útnak nevezzük a sorozatot, ha monoton növekvő vagy monoton csökkenő út. A monoton út kezdőpontjának nevezzük az X_1 pontot, végpontjának az X_n pontot. A monoton út hossza pedig az n szám.

2. definíció. Az $X = (x_1, y_1)$ és $Y = (x_2, y_2)$ rácspontokra $X \nearrow Y$, hogyha $x_1 \leq x_2$ és $y_1 \leq y_2$, és $X \searrow Y$, ha $x_1 \leq x_2$ és $y_2 \leq y_1$.

A definícióból könnyen látható, hogy a $\nearrow$ és $\searrow$ relációk tranzitívak. A következő egyszerű állítások megmondják, hogy hogyan tudunk monoton utakat konstruálni.

1. állítás. *Ha $S_1, S_2, \ldots, S_k$ monoton növekvő (illetve csökkenő) utak úgy, hogy S_i végpontja megegyezik S_{i+1} kezdőpontjával ($i = 1, 2, \ldots, k-1$), akkor $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ is monoton növekvő (illetve csökkenő) út.*

Ennek az állításnak a bizonyítását az olvasóra bízom. A következő állításokban azt mutatom meg, hogy mikor illeszthetek néhány pontra egy monoton növekvő, vagy csökkenő utat.

2. állítás. *Az X, Y rácspontokra akkor és csak akkor illeszthető monoton növekvő út, ha $X \nearrow Y$, vagy $Y \nearrow X$, és csak akkor illeszthető monoton csökkenő út, ha $X \searrow Y$, vagy $Y \searrow X$.*

Bizonyítás. Elég csak a monoton növekvő esetet bizonyítani, a csökkenő teljesen hasonlóan bizonyítható. Legyen $X = (x_1, y_1)$ és $Y = (x_2, y_2)$, és tegyük fel, hogy $X \nearrow Y$. Definiáljuk az $S = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ sorozatot a következőképpen: legyen $n = x_2 - x_1 + y_2 - y_1 + 1$ és

$$X_j = (x_1 + j - 1, y_1),$$

ha $1 \leq j \leq x_2 - x_1$ és

$$X_{j+x_2-x_1} = (x_2, y_1 + j - 1),$$

ha $1 \leq j \leq y_2 - y_1 + 1$. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy $x_2 - x_1 \geq 0$ és $y_2 - y_1$ miatt S monoton növekvő út lesz, aminek kezdőpontja X, végpontja Y. Ha $Y \nearrow X$, akkor ugyanez a bizonyítás elmondható, csak X és Y szerepét kell felcserélni.

Teljes indukcióval könnyen bizonyítható, hogy ha X és Y egy monoton növekvő út két tagja, akkor $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0$, s ez ekvivalens azzal, hogy $X \nearrow Y$, vagy $Y \nearrow X$, így ez szükséges feltétel, hogy legyen rajtuk keresztül monoton növekvő út.
∎

3. állítás. *Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ rácspontokra teljesül, hogy $A_1 \nearrow A_2 \nearrow \ldots \nearrow A_k$, akkor létezik olyan monoton növekvő út, amely tartalmazza ezeket a pontokat, és ha $A_1 \searrow A_2 \searrow \ldots \searrow A_k$, akkor létezik olyan monoton csökkenő út, amely tartalmazza őket.*

Bizonyítás. Most csak a monoton növekvő esetet nézem, a csökkenő teljesen hasonlóan megy. Az előző állítás alapján létezik olyan S_l monoton növekvő út, amelynek kezdőpontja A_l, végpontja A_{l+1}, így ezekre az utakra az 1. *állítás* alapján $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ is monoton növekvő út, ami tartalmazza az $A_1, \ldots, A_k$ pontok mindegyikét.
∎

4. állítás. *Legyen H a rácspontok egy véges halmaza, és tegyük fel, hogy bármely $X, Y \in H$ esetén $X \nearrow Y$ vagy $Y \nearrow X$ teljesül. Ekkor létezik olyan S monoton növekvő út, amely a H összes pontját tartalmazza. (A megfelelő állítás igaz monoton csökkenő utak esetére is.)*

Bizonyítás. Tekintsük azt a G irányított gráfot, amelynek csúcsai H elemeinek felelnek meg, és $X, Y \in H$ esetén X-ből Y-ba akkor megy él, ha $X \nearrow Y$. Ekkor a feltétel alapján G egy teljes irányított gráf lesz, így van benne Hamilton-út. Legyenek ebben a Hamilton-útban a pontok sorban $A_1, \ldots, A_k$; ekkor $A_1 \nearrow A_2 \nearrow \ldots \nearrow A_k$, így az előző állítás alapján van olyan S monoton út, amely tartalmazza ezen pontokat, azaz H minden pontját. ■

5. állítás. *Ha S egy (x_1, y_1) kezdőpontú és (x_2, y_2) végpontú monoton út, akkor S hossza*

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + 1.$$

Bizonyítás. Most csak monoton növekvő utakra bizonyítom, monoton csökkenőre teljesen hasonlóan megy. Ha a monoton növekvő út kezdőpontja (x_1, y_1), végpontja (x_2, y_2), akkor $(x_1, y_1) \nearrow (x_2, y_2)$, így $x_1 \le x_2$ és $y_1 \le y_2$, vagyis azt kell bizonyítani, hogy a hossza $x_2 - x_1 + y_2 - y_1 + 1$. Ezt pedig a hossz szerinti teljes indukcióval bizonyítom. Ha a hossz 1, akkor a monoton növekvő út 1 pontból áll, így $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, azaz $x_2 - x_1 + y_2 - y_1 + 1 = 1$, ami valóban a hossz.

Most tegyük fel, hogy minden k hosszú monoton növekvő útra igaz az állítás, és nézzük $k+1$-re. Ha a $k+1$ hosszú monoton növekvő út végpontja (x_2, y_2), akkor az ez előtt lévő pont lehet $(x_2 - 1, y_2)$ vagy $(x_2, y_2 - 1)$. Ha elhagyjuk az utolsó pontot, akkor egy k hosszú utat kapunk, így ha annak a végpontja $(x_2 - 1, y_2)$, akkor az indukció alapján

$$(x_2 - 1) - x_1 + y_2 - y_1 + 1 = k,$$

vagyis

$$x_2 - x_1 + y_2 - y_1 + 1 = k + 1,$$

ami a bizonyítandó volt. Ha a végpont előtti pont $(x_2, y_2 - 1)$ volt, akkor

$$x_2 - x_1 + (y_2 - 1) - y_1 + 1 = k,$$

ahonnan szintén $x_2 - x_1 + y_2 - y_1 + 1 = k + 1$, így kész vagyunk. ■

3. Monoton utak általános rácsponthalmazokban

3.1. Erdős–Szekeres-tétel monoton utakra.

Az Erdős–Szekeres-tétel [2] azt mondja ki, hogy a valós számok egy legalább $t^2 + 1$ hosszú sorozatában van $t+1$ hosszú monoton csökkenő vagy egy $t+1$ hosszú monoton növekvő részsorozat. Az erre adott egyik bizonyítás szinte egy az egyben átvihető rácspontok részhalmazaira és monoton utakra a következőképpen:

1. tétel. *Legyen H a rácspontok egy legalább $t^2 + 1$ elemű részhalmaza, ekkor létezik olyan S monoton út, hogy $|S \cap H| \ge t + 1$.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt módon, hogy bármely S monoton útra $|S \cap H| < t+1$. Definiáljuk az $f, g : H \to \mathbb{N}$ függvényeket a következőképpen: minden $X \in H$ esetén legyen

$$f(X) = \max\{|S \cap H|\},$$

ahol S végigfut az összes X kezdőpontú monoton növekvő úton, és legyen

$$g(X) = \max\{|T \cap H|\},$$

ahol T végigfut az összes X kezdőpontú monoton csökkenő úton. Ekkor az indirekt feltevés alapján $f(X), g(X) < t+1$.

Megmutatom, hogy ha $X, Y \in H$ és $X \neq Y$, akkor

$$\big(f(X), g(X)\big) \neq \big(f(Y), g(Y)\big)$$

(tehát mint számpárok különböznek). Nyilván az $X \nearrow Y$, $Y \nearrow X$, $X \searrow Y$ és $Y \searrow X$ közül legalább az egyik teljesül, tegyük fel, hogy $X \nearrow Y$ (a többi ugyanúgy kezelhető); ekkor létezik monoton növekvő út, S_0, aminek X a kezdőpontja, és Y a végpontja. Legyen S egy Y kezdőpontú monoton növekvő út, amelyre $|H \cap S| = f(Y)$ (ilyen S az f függvény definíciója miatt létezik). Ekkor az 1. *állítás* miatt $S_0 \cap S$ is monoton növekvő út lesz, amelynek X a kezdőpontja, így

$$f(X) \geq \big|H \cap (S_0 \cup S)\big| \geq \big|(H \cap S) \cup X\big| = f(Y) + 1,$$

azaz $f(X) > f(Y)$, tehát

$$\big(f(X), g(X)\big) \neq \big(f(Y), g(Y)\big).$$

(Ha $Y \nearrow X$, akkor $f(Y) > f(X)$. Ha $X \searrow Y$, akkor $g(X) > g(Y)$. Ha $Y \searrow X$, akkor $g(X) < g(Y)$.)

Ám ez ellentmondás, ugyanis $f(X), g(X) \in \{1, 2, \ldots, t\}$, így legfeljebb t^2 különböző $\big(f(X), g(X)\big)$ pár van, ám H legalább $t^2 + 1$ elemű. Ezzel az állítás be van bizonyítva. ∎

3.2. Fedés minimális számú monoton úttal. Ebben a részben azt vizsgálom, hogy a halmaz méretétől függően hány monoton úttal lehet biztosan lefedni a halmazt. Erre az előző tételt használva kaphatunk felső becslést. Ugyanis az alapján egy t pontú halmazban van $\lceil \sqrt{t} \rceil$ pontot lefedő monoton út, így ha azt az algoritmust követjük, hogy a H halmazból elhagyjuk az egyik $\lceil \sqrt{|H|} \rceil$ pontot tartalmazó monoton utat, majd ezt ismételjük, amíg az üres halmazhoz nem jutunk, akkor aszimptotikusan $2\sqrt{t}$ monoton út kell. Ám megmutatom, hogy ennél erősebb is igaz, vagyis hogy $\sqrt{2t} + O(1)$ monoton út is biztosan elég.

2. tétel. *Legyen H egy legfeljebb $\frac{t(t+1)}{2} - 1$ elemű ponthalmaz ($t \geq 2$ egész szám). Ekkor léteznek olyan $S_1, \ldots, S_{t-1}$ monoton utak, hogy*

$$H \subset \bigcup_{i=1}^{t-1} S_i.$$

Bizonyítás. Az állítást t szerinti teljes indukcióval bizonyítom. $t = 2$ esetén $\frac{t(t+1)}{2} - 1 = 2$ pontot kell lefedni 1 monoton úttal, ami nyilván mindig lehetséges. Ezután tegyük fel, hogy $(t-1)$-re igaz az állítás; megmutatom, hogy ekkor t-re is $(t \geq 3)$. Ha létezik olyan S monoton út, hogy $|S \cap H| \geq t$, akkor legyen $H' = H \setminus S$. Ekkor $|H'| \leq |H| - t = \frac{t(t-1)}{2} - 1$, vagyis az indukciós feltevés alapján léteznek $S_1, S_2, \ldots, S_{t-2}$ utak, melyekre

$$H' \subset \bigcup_{i=1}^{t-2} S_i,$$

s ekkor, ha $S_{t-1} = S$, akkor

$$H \subset \bigcup_{i=1}^{t-1} S_i.$$

Ezután tegyük fel, hogy nincs olyan monoton út, ami legalább t pontját tartalmazza H-nak. Definiáljuk az $f : H \to \mathbb{N}$ függvényt a következőképpen: minden $X \in H$ esetén legyen

$$f(X) = \max\{|H \cap S|\},$$

ahol S végigfut az összes X kezdőpontú monoton növekvő úton. Ekkor $f(X) < t$ minden $X \in H$ esetén a feltevés alapján. Legyen

$$A_k = \{X \in H \mid f(X) = k\},$$

ha $k = 1, 2, \ldots, t-1$. Megmutatom, hogy létezik olyan S_k monoton csökkenő út, hogy $A_k \subset S_k$. Legyen $Y, Z \in A_k$ két különböző pont (ha A_k egyelemű, akkor nyilván lefedhető egy monoton csökkenő úttal), s tegyük fel, hogy $Y \nearrow Z$. Ekkor legyen T az a monoton növekvő út, aminek kezdőpontja Y, végpontja a Z (a 2. *állítás* alapján létezik ilyen T út), s tekintsünk egy olyan monoton növekvő T' utat, melynek Z a kezdőpontja és $|T' \cap H| = k$ (az f függvény definíciója alapján létezik ilyen T'). Ekkor a $T \cup T'$ egy Y kezdőpontú, legalább $k+1$ hosszú monoton növekvő út lesz, ami ellentmond az $Y \in A_k$ feltételnek. Tehát $Y \nearrow Z$ nem állhat fenn, s ugyanígy $Z \nearrow Y$ sem, tehát szükségképpen $Y \searrow Z$, vagy $Z \searrow Y$.

Konstruáljuk a G gráfot a következőképpen: legyenek G csúcsai A_k pontjai, s akkor menjen Y-ból Z-be él, ha $Y \searrow Z$. Ekkor G egy teljes irányított gráf, így van benne irányított Hamilton-út. Legyenek a Hamilton-útban a pontok sorban $X_1, X_2, \ldots, X_l$, ahol $l = |A_k|$; ekkor

$$X_1 \searrow X_2 \searrow \ldots \searrow X_l,$$

vagyis a 3. *állítás* alapján létezik olyan monoton csökkenő S_k út, amely tartalmazza az $X_1, \ldots, X_l$ pontokat, vagyis $A_k \subset S_k$. Mivel

$$H = \bigcup_{i=1}^{t-1} A_k,$$

így

$$H \subset \bigcup_{i=1}^{t-1} S_k,$$

vagyis az állítás be van bizonyítva. ∎

Nyilván a $\nearrow$ reláció egy részbenrendezést ad a rácspontok halmazán, ahol egy tetszőleges lánc lefedhető egy monoton növekvő úttal, míg egy antilánc egy monoton csökkenő úttal. Az előző tétel általánosabban kimondható tetszőleges részbenrendezett halmazra is:

3. tétel. *Legyen t egy pozitív egész, P egy POSET, melyre $|P| \leq \frac{t(t+1)}{2} - 1$; ekkor léteznek olyan $L_1, L_2, \ldots, L_{t-1} \subseteq P$ halmazok, hogy L_i lánc vagy antilánc $(i = 1, 2, \ldots, t-1)$, és*

$$P = \bigcup_{i=1}^{t-1} L_i.$$

Bizonyítás. Az állítást t szerinti teljes indukcióval bizonyítom. $t = 2$ esetén a P halmaz legfeljebb 2 elemű, s bármely két elem vagy egy láncot vagy egy antiláncot alkot, így ebben az esetben az $L_1 = P$ halmaz megfelelő. Ezután tegyük fel, hogy $t-1$-re igaz az állítás; megmutatom, hogy ekkor t-re is $(t \geq 3)$.

Ha van P-ben legalább t elemű antilánc, akkor az legyen L_{t-1}; ekkor a $P \setminus L_{t-1}$ is egy POSET, amely legfeljebb $\frac{t(t+1)}{2} - 1 - t = \frac{t(t-1)}{2} - 1$ elemű, így az indukciós feltevés alapján léteznek $L_1, \ldots, L_{t-2}$ halmazok, amelyek uniója a $P \setminus L_{t-1}$ halmaz, és mindegyik lánc vagy antilánc, így az $L_1, \ldots, L_{t-1}$ halmazok lefedik P-t, s rájuk is igaz, hogy mindegyikük lánc vagy antilánc.

Most nézzük, ha P-ben nincs t-elemű antilánc. Dilworth tétele [3] azt mondja ki, hogy a maximális antilánc mérete megegyezik a minimális láncfelbontással. Így mivel a maximális antilánc legfeljebb $t-1$ elemű, így P felbontható $t-1$ lánc uniójára. ∎

Megmutatom, hogy a 2. *tétel* állítása éles (s így a 3. *tétel* állítása is), vagyis lehet konstruálni olyan $\frac{t(t+1)}{2}$ elemű rácsponthalmazt, hogy annak lefedéséhez legalább t monoton út kell.

4. tétel. *Minden $t \geq 1$ egész esetén létezik olyan $\frac{t(t+1)}{2}$ elemű H rácsponthalmaz, aminek a lefedéséhez legalább t monoton út kell.*

Bizonyítás. Legyen

$$A_k = \left\{ \left(\frac{k(k+1)}{2} - i, \frac{k(k-1)}{2} + i + 1 \right) \middle| \, i = 0, 1, \ldots, k-1 \right\},$$

ha $k = 1, 2, \ldots$. Ekkor $|A_k| = k$, és tetszőleges $X, Y \in A_k$ esetén $X \searrow Y$, vagy $Y \searrow X$, de $X \nearrow Y$ és $Y \nearrow X$ egyike sem áll fenn. Ez azt jelenti, hogy bármely monoton növekvő út legfeljebb 1 elemét tartalmazhatja A_k-nak. Ezenkívül, ha

$l < m$ pozitív egészek, akkor $X \in A_l$ és $Y \in A_m$ esetén $X \nearrow Y$ teljesül, de $X \searrow Y$ és $Y \searrow X$ egyike sem, mivel az A_l-ben lévő pontok x és y koordinátája is legfeljebb $\frac{l(l+1)}{2}$, míg az A_m-ben lévő pontok x és y koordinátája is legalább $\frac{m(m-1)}{2} + 1$, ahol

$$\frac{m(m-1)}{2} + 1 > \frac{(l+1)l}{2}.$$

Így bármely monoton csökkenő S úthoz legfeljebb egy olyan k index létezik, hogy $S \cap A_k$ nem üres.

Megmutatom, hogy a $H = \bigcup_{k=1}^{t} A_k$ halmaz megfelel az állítás feltételeinek. Először is

$$|H| = \sum_{k=1}^{t} |A_k| = \sum_{k=1}^{t} k = \frac{t(t+1)}{2}.$$

Tegyük fel indirekt, hogy H lefedhető $(t-1)$ monoton úttal, legyenek ezek $S_1, \ldots,$ S_{t-1}, és legyenek ebből a monoton növekvők $S_1, \ldots, S_l$. Legyen $k = 1, 2, \ldots, t$ esetén

$$B_k = A_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{l} S_i \right).$$

Ekkor mivel bármely monoton növekvő útnak legfeljebb 1 metszéspontja lehet A_k-val, így ha $|A_k| > l$, akkor B_k nem üres, vagyis a $B_{l+1}, B_{l+2}, \ldots, B_t$ halmazok nem üresek, így az $S_{l+1}, \ldots, S_{t-1}$ monoton csökkenő utaknak le kell fedniük ezeket a halmazokat. Ám ez összesen $(t-l)$ halmaz, míg a monoton csökkenő utak száma $(t-l-1)$, és bármely monoton csökkenő útnak legfeljebb egy B_k-val lehet közös pontja, így ez nem lehet. Tehát H lefedéséhez legalább t monoton út kell, s ezzel az állítás be van bizonyítva. ■

Még felmerülhet az a kérdés, hogy mi a korlát akkor, ha megköveteljük, hogy csak egyfajta monoton utat használhatunk, azaz ha csak monoton csökkenő, vagy csak monoton növekvő utakat használhatunk a fedésben.

5. tétel. *Legyen H egy n elemű rácsponthalmaz. Ekkor létezik $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ vagy monoton csökkenő, vagy monoton növekvő út, amelyek tartalmazzák H összes pontját, és ez éles, azaz megadható olyan H, amelyet nem lehet $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ monoton csökkenő vagy monoton növekvő úttal lefedni.*

Bizonyítás. A 2. *állítás* bizonyítása során megmutattuk, hogy ha egy monoton növekvő út a H halmaznak legfeljebb k pontját tartalmazza, akkor H lefedhető k monoton csökkenő úttal. Így, ha bármely monoton út legfeljebb $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ pontot tartalmaz H-ból, akkor lefedhető $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ darab monoton csökkenő úttal. Míg ha valamely monoton növekvő út legalább $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ pontot tartalmaz, akkor legyen ez az út S; ekkor a $H \setminus S$ halmaz legfeljebb $n - \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ elemű, így ha $H \setminus S$ minden pontját egy egyelemű monoton növekvő útnak tekintjük, akkor H-t legfeljebb

$$1 + \left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\right) = n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

darab monoton növekvő úttal lefedtük, így az állítás be van bizonyítva.

Most példát adok arra, hogy ez éles.

Ha $n = 2m + 1$ páratlan, legyen

$$H = \big((0,0),(1,1),\ldots,(m-1,m-1),(m,2m),(m+1,2m-1),\ldots,(2m,m)\big).$$

Ekkor

$$(0,0),(1,1),\ldots,(m-1,m-1),(m,2m)$$

$m+1$ darab olyan pont, hogy semelyik kettőt sem fedi le egy monoton csökkenő út, így legalább $m+1$ monoton csökkenő út kell H fedéséhez,

$$(m,2m),(m+1,2m-1),\ldots,(2m,m)$$

pedig $m+1$ olyan pont, hogy semelyik kettőt sem fedi le egy monoton növekvő út, így legalább $m+1$ monoton növekvő út kell H fedéséhez.

Ha pedig $n = 2m$ páros, akkor

$$H = \big((0,0),(1,1),\ldots,(m-1,m-1),(m,2m-1),(m+1,2m-2),\ldots,(2m-1,m)\big).$$

Ez hasonlóan ellenőrizhető, mint az előző eset. ∎

3.3. Monoton utak kiterjesztése $\mathbb{R}^2$-re. Terjesszük ki a monoton utak definícióját rácspontok helyett $\mathbb{R}^2$-re a következőképpen:

3. definíció. Egy $L \subset \mathbb{R}^2$ halmaz monoton növekvő vonal, ha bármely $X, Y \in L$ esetén $X - Y \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, vagy $X - Y \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$. L monoton csökkenő vonal, ha bármely $X, Y \in L$ esetén $X - Y \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$, vagy $X - Y \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$. Ezenkívül az $S \subset \mathbb{R}^2$ halmazt monoton növekvő sávnak nevezzük, ha létezik olyan L monoton növekvő vonal, hogy S azon pontok halmaza, melyek távolsága L-től kisebb, mint $\frac{1}{2}$. Hasonlóan a monoton csökkenő sáv definíciója. Egy halmaz monoton sáv, ha monoton csökkenő, vagy monoton növekvő sáv.

Nézzük, hogy milyen kapcsolat van egy monoton sávokkal történő optimális fedés és egy monoton utakkal történő optimális fedés között.

6. tétel. *Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$ tetszőleges korlátos halmaz és $H_0 = H \cap \mathbb{Z}^2$, azaz H_0 a H-ban lévő rácspontok halmaza. Legyen M_s a legkisebb olyan k egész, hogy H lefedhető k darab monoton sávval és M_u a legkisebb olyan k szám, amelyre H_0 lefedhető k darab monoton úttal. Ekkor $M_s \geq M_u$.*

Bizonyítás. Legyen H egy $k = M_s$ darab monoton sávot tartalmazó fedése $S_1, \ldots, S_k$. Ekkor nyilván $S_1, \ldots, S_k$ lefedi H_0-t is. Megmutatom, hogy ha S_i $(i = 1, \ldots, k)$ monoton növekvő sáv, akkor $S_i \cap H_0$ lefedhető egy monoton növekvő úttal, ha pedig monoton csökkenő sáv, akkor egy monoton csökkenő úttal. Ebből már nyilvánvalóan következik a tétel állítása, ugyanis ha $S_i \cap H_0$-t lefedi a T_i monoton út, akkor a $T_1, \ldots, T_k$ monoton utak lefedik H_0-t. Tegyük fel, hogy S_i monoton növekvő sáv (a monoton csökkenő eset teljesen hasonlóan bizonyítható). Elég megmutatni, hogy $S_i \cap H_0$ véges és tetszőleges $X, Y \in S_i \cap H_0$ esetén $X \nearrow Y$ vagy $Y \nearrow X$, ugyanis ekkor a 4. *állítás* alapján létezik T_i monoton növekvő út, mely lefedi $S_i \cap H_0$-t. A végesség nyilvánvaló, mivel H korlátos, így már H_0 is véges lesz. Most nézzünk egy tetszőleges $X, Y \in S_i \cap H_0$ pontpárt, ahol $X \neq Y$. Legyen L_i az a monoton növekvő vonal, amelytől S_i pontjai $\frac{1}{2}$-nél közelebb vannak, ekkor valamely $A, B \in L_i$ pontpárra $|X - A| < \frac{1}{2}$ és $|Y - B| < \frac{1}{2}$. Ezenkívül $B - A \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$, és az általánosság elvesztése nélkül feltehetjük, hogy $B - A \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, ekkor megmutatom, hogy $X \nearrow Y$. Legyen $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$, $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$. Ha $x_1 > y_1$, akkor $x_1 \geq y_1 + 1$, és A és B definíciójából következik, hogy $a_1 > x_1 - \frac{1}{2}$ és $b_1 < y_1 + \frac{1}{2}$. Vagyis $a_1 > b_1$, ami ellentmond annak, hogy $B - A \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Tehát szükségképpen $x_1 \leq y_1$. Ugyanígy megmutathatjuk, hogy $x_2 \leq y_2$. Ebből vagy $X = Y$, amit kizártunk, vagy $X \nearrow Y$, amit bizonyítani akartunk. ∎

Megjegyzés: Ha a monoton sávok definíciójában a $< \frac{1}{2}$ távolságot a $\|.\|_\infty$ norma szerint értjük ($\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$) az előző állítás ugyanúgy igaz ugyanazzal a bizonyítással. Ebben az esetben $M_s = M_u$ gyakran fennállhat. Ugyanis ha $S = (X_1, \ldots, X_m)$ egy monoton út, akkor egy monoton vonal is (a definícióból könnyen következik), s az ezáltal meghatározott S^* monoton sáv az S pontjai, mint középpontok köré rajzolt egységnégyzetek uniója. Így ha a H halmazunk olyan, hogy a H_0 pontjai, mint középpontok köré rajzolt egységnégyzetek uniója lefedi H-t, akkor $M_u = M_s$.

4. Téglalapok fedése monoton utakkal

Ebben a részben egy $a \times b$ méretű téglalap, azaz az

$$R = \{(x, y) \mid x = 0, 1, \ldots, a-1;\ y = 0, 1, \ldots, b-1\}$$

halmaz monoton utakkal való fedését fogom vizsgálni.

4.1. Téglalapok fedése diszjunkt monoton utakkal. Egy $a \times b$ méretű téglalap, ahol $a \leq b$, nyilván lefedhető a darab diszjunkt monoton úttal, például a téglalap minden oszlopa egy monoton (növekvő és csökkenő) út, és összesen a oszlopa van. Egy kis próbálkozás után észrevehetjük, hogy a-nál kevesebb monoton út viszont nem elég, ha feltesszük, hogy páronként diszjunktak legyenek, ám a darab monoton úttal sokféleképpen le lehet fedni.

7. tétel. *Legyenek $a \leq b$ pozitív egészek, és legyen*

$$R = \{(x, y) \mid x = 0, 1, \ldots, a-1;\ y = 0, 1, \ldots, b-1\}$$

az $a \times b$ méretű téglalap. Tegyük fel, hogy $S_1, \ldots, S_t$ páronként diszjunkt monoton utak úgy, hogy $R = \bigcup_{i=1}^{t} S_i$. Ekkor $t \geq a$.

Bizonyítás. Az állítást a szerinti teljes indukcióval bizonyítom. Hogyha $a = 1$, b akármilyen pozitív szám, akkor R nem üres halmaz, így legalább 1 monoton út kell a lefedéséhez, így $t \geq 1$. Ezután tegyük fel, hogy $a-1$-re igaz az állítás, azaz ha $b' \geq a-1$, akkor egy $(a-1) \times b'$ méretű téglalap lefedéséhez legalább $a-1$ páronként diszjunkt út kell. Ekkor megmutatom, hogy $a \leq b$ esetén legalább a diszjunkt monoton út kell.

Legyen S_1 az a monoton út, amelyik a $(0,0)$ pontot tartalmazza. Ha S_1 monoton csökkenő út, akkor minden pontja $(0,y)$, vagy $(x,0)$ alakú, ahol $0 \leq y \leq b-1$ és $0 \leq x \leq a-1$. Legyen

$$S_1' = \big((0,b-1),(0,b-2),\ldots,(0,0),(1,0),(2,0),\ldots,(a-1,0)\big).$$

Ekkor $S_1 \subseteq S_1'$. Ha egy $X \in S_1'$ pont egy S_k út része, akkor hagyjuk el S_k-ból X-et. Ekkor könnyen látható, hogy S_k-nak az első és/vagy utolsó néhány pontját hagytuk el, így monoton út marad, vagy megszűnik. Ekkor megkaptuk az

$$R' = \big\{(x,y) \mid x = 1,2,\ldots,a-1;\ y = 1,2,\ldots,b-1\big\}$$

halmaz fedését az $S_2, S_3, \ldots, S_t$ páronként diszjunkt monoton utakkal, ahol R' egy $(a-1) \times (b-1)$-es téglalap, így az indukció alapján $t-1 \geq a-1$, vagyis $t \geq a$.

Ezután tegyük fel, hogy S_1 monoton növekvő út. Ekkor a következőkben definiált algoritmussal keresünk a téglalapnak egy olyan fedését, amely legfeljebb ugyanannyi monoton utat tartalmaz, és az egyik út kezdőpontja a $(0,0)$ pont, végpontja az $(a-1,b-1)$ pont. Ilyen fedést pedig úgy találunk, hogy minden lépésben megnöveljük S_1-et úgy, hogy más monoton utakból vágunk le pontot vagy szakaszt és hozzáragasztjuk, figyelve, hogy ami monoton út volt az monoton út maradjon, vagy eltűnjön. Ismételjük a következő algoritmust: legyen S_1 végpontja $V = (u,v)$, s nézzük a következő eseteket:

1. *eset:* $u = a-1$. Ekkor vegyük az S_1 úthoz az $(a-1,v+1),(a-1,v+2)$, $\ldots,(a-1,b-1)$ pontokat, s hogyha az $(a-1,v+i)$ pont az S_j monoton út egy pontja volt, akkor hagyjuk el S_j-ből ezt a pontot ($i = 1,2,\ldots,b-1-v$). Ekkor könnyen látható, hogy S_1 továbbra is monoton növekvő út maradt, S_j pedig szintén monoton út maradt, vagy megszűnt. Ugyanis ha S_j monoton növekvő út volt, akkor $S_j \subset R$ miatt nem lehet $(a-1)$-nél nagyobb az első koordináta, vagyis az $(a-1,v+i)$ pont után csak $(a-1,v+i')$ alakú pontok lehetnek S_j-ben, ahol $i < i' \leq b-1-v$. Ha S_j monoton csökkenő út volt, akkor annak is az utolsó néhány pontját hagytuk el, ugyanis $(a-1,v+i)$ után már csak $(a-1,v+i')$ alakú pontok lehetnek S_j-ben, ahol $i > i' > 0$, ugyanis ha $i' = 0$, akkor az $(a-1,v) \in S_1$ pontot kapjuk, ami ellentmond a diszjunktságnak.

2. *eset:* $v = b-1$. Ezt teljesen hasonlóan kezelhetjük, mint az előző esetet. Vegyük az S_1 úthoz az $(u+1,b-1),(u+2,b-1),\ldots,(a-1,b-1)$ pontokat, s hogyha az $(u+i,b-1)$ pont az S_j monoton út egy pontja volt, akkor hagyjuk el S_j-ből ezt a pontot ($i = 1,2,\ldots,a-1-u$). Ekkor könnyen látható, hogy S_1 továbbra is monoton növekvő út maradt, S_j pedig szintén monoton út maradt, vagy megszűnt.

Ugyanis ha S_j monoton növekvő út volt, akkor $S_j \subset R$ miatt nem lehet $(b-1)$-nél nagyobb a második koordináta, vagyis az $(u+i, b-1)$ pont után csak $(u+i', b-1)$ alakú pontok lehetnek S_j-ben, ahol $i < i' \leq a-1-u$. Ha S_j monoton csökkenő út volt, akkor annak az első néhány pontját hagytuk el, ugyanis $(u+i, b-1)$ előtt már csak $(u+i', b-1)$ alakú pontok lehetnek S_j-ben, ahol $0 < i' < i$, ugyanis ha $i' = 0$, akkor az $(u, b-1) \in S_1$ pontot kapjuk, ami ellentmond a diszjunktságnak.

3. *eset:* Az $(u+1, v)$ pont egy S_j monoton út kezdő-, vagy végpontja. Ekkor adjuk S_1-hez az $(u+1, v)$ pontot, S_j-ből pedig hagyjuk el. Ekkor nyilvánvalóan S_1 monoton növekvő út maradt, S_j pedig monoton út.

4. *eset:* Az $(u, v+1)$ pont egy S_j monoton út kezdő-, vagy végpontja. Teljesen hasonló, mint a 3. eset.

5. *eset:* Az $(u+1, v)$ pont egy S_j monoton növekvő út egy belső pontja. Legyen S_j^v az S_j monoton út $(u+1, v)$ ponttal kezdődő szakasza, S_j^e pedig az az előtti szakasza. Ekkor ha S_1-hez hozzárakjuk az $(u+1, v)$ pontot, akkor egy monoton növekvő út marad, és a végpontja meg fog egyezni S_j^v kezdőpontjával, így $S_1 \cup S_j^v$ szintén monoton növekvő út lesz, így adjuk S_1-hez S_j^v pontjait, és S_j helyett pedig maradjon S_j^e.

6. *eset:* Az $(u, v+1)$ pont egy monoton növekvő út egy belső pontja. Itt teljesen hasonlóan járhatunk el, mint az előző esetben.

7. *eset:* Azon esetek, amelyek az 1.–6. eset egyikébe se esnek bele. Nézzük, hogy mit jelent ez. Kis átgondolás után könnyen megkaphatjuk, hogy ekkor $(u, v+1)$ és $(u+1, v)$ is egy monoton csökkenő út egy belső pontja. Legyen $(u+1, v)$ az S_k monoton csökkenő út belső pontja, $(u, v+1)$ pedig az S_l úté. Megmutatom, hogy $k = l$. Mivel $(u+1, v)$ belső pontja S_k-nak, így van egy azt megelőző pontja, ami mivel monoton csökkenő út, így (u, v), vagy $(u+1, v+1)$ lehet. Ám (u, v) az S_1-nek pontja, így szükségképpen $(u+1, v+1)$ lesz a megelőző pont. Hasonlóan $(u, v+1)$ belső pontja S_l-nek, így van egy azt követő pontja S_l-nek, ami mivel monoton csökkenő út, így vagy az (u, v), vagy az $(u+1, v+1)$. Az (u, v) szintén nem lehet, mivel az S_1-nek pontja, tehát $(u+1, v+1)$ lesz a rákövetkező pont. Tehát az $(u+1, v+1)$ pont S_k-nak és S_l-nek is pontja, de ha $k \neq l$, akkor S_k és S_l diszjunktak, így szükségképpen $k = l$.

Csináljuk a következőt: legyen $S_k = (X_1, \ldots, X_m)$, ahol $X_{j-1} = (u, v+1)$, $X_j = (u+1, v+1)$ és $X_{j+1} = (u+1, v)$. Adjuk S_1-hez az X_{j-1} és X_j pontokat, és legyen $S_k^1 = (X_1, \ldots, X_{j-2})$ és $S_k^2 = (X_{j+1}, \ldots, X_m)$. Ekkor S_1 monoton út maradt, S_k pedig szétesett két monoton csökkenő útra. Jegyezzük meg, hogy S_k^1 végpontja vagy $(u-1, v+1)$, vagy $(u, v+2)$, míg S_k^2 kezdőpontja $(u+1, v)$.

Látható, hogy az algoritmus lépései során az S_1 monoton növekvő út hossza mindig legalább eggyel nő, ha S_1 végpontja nem az $(a-1, b-1)$ pont, így egyszer eljutunk ebbe az állapotba, mivel bármely R-ben haladó monoton útnak legfeljebb $a+b-1$ a hossza. Ezenkívül minden lépés után R-nek egy diszjunkt utakkal való fedése marad, méghozzá ha a 7. esetben leírt szétvágott részeket egynek tekintjük, akkor a fedésben a monoton utak száma nem nőtt.

Tehát ezután nézzük, ha S_1 kezdőpontja a $(0,0)$, végpontja $(a-1, b-1)$. Ekkor S_1 tulajdonképpen szétvágja R-t két részre, és mi ezt a két részt fogjuk összetolni egy $(a-1) \times (b-1)$-es téglalappá. Ehhez először is definiáljuk az S_1 alatti és feletti pontokat. Legyen

$$L_k = \{(x,y) \mid x+y=k\} \cap R,$$

azaz R azon pontjai, ahol a koordináták összege k ($k = 0, \ldots, a+b-2$). Mivel S_1-ben az l-edik pontban a koordináták összege $l-1$ ($l = 1, \ldots, a+b-1$), így

$$|L_k \cap S_1| = 1.$$

Legyen $X = (x,y) \in R$ tetszőleges, és legyen

$$D(X) = (d_1(X), d_2(X)) = L_{x+y} \cap S_1.$$

Ha $d_1(X) < x$, akkor X egy S_1 alatti pont, ha pedig $d_1(X) > x$, akkor X egy S_1 feletti pont. Transzformáljuk $R \setminus S_1$ pontjait a következőképpen: ha $X \in R$ egy S_1 feletti pont, akkor legyen

$$\varphi(X) = X + (0, -1),$$

ha pedig X egy S_1 alatti pont, akkor

$$\varphi(X) = X + (-1, 0).$$

Ekkor meggondolható, hogy φ egy bijekció $R \setminus S_1$ és az

$$R' = \{(x,y) \mid x = 0, 1, \ldots, a-2;\ y = 0, 1, \ldots, b-2\}$$

halmaz között. Nézzük, hogy ez miért igaz. Ha az $X \in R \setminus S_1$ pont $(x, 0)$ alakú ($x > 0$ mivel a $(0,0)$ pont az S_1-nek eleme), akkor $D(X) = (d_1(X), d_2(X))$, ahol $d_1(X) + d_2(X) = x$, és $d_1(X)$ és $d_2(X)$ is nemnegatívak, így $d_1(X) \leq x$, ám ha $d_1(X) = x$, akkor $D(X) = X$, ami lehetetlen, így $d_1(X) < x$, vagyis az X pont S_1 alatt van, így $\varphi(X) = (x-1, 0) \in R'$, mivel $0 \leq x-1 \leq a-2$. Hasonlóan, ha $X = (0, y)$ alakú, akkor $\varphi(X) = (0, y-1) \in R'$. Ezenkívül, ha $X = (x,y)$ alakú, ahol $0 < x \leq a-1$ és $0 < y \leq b-1$, akkor $\varphi(X) = (x-1, y)$ vagy $(x, y-1)$, ahol mindkét pont R' eleme. Tehát beláttuk, hogy φ az R'-be képez. Ezenkívül

$$|R \setminus S_1| = |R| - |S_1| = ab - (a+b-1) = (a-1)(b-1) = |R'|,$$

vagyis ahhoz hogy φ bijekció, elég bizonyítani, hogy injektív. Tegyük fel indirekt, hogy valamely $X \neq Y \in R \setminus S_1$ esetén $\varphi(X) = \varphi(Y)$. Könnyen látható, hogy ez csak úgy fordulhatna elő, ha $\varphi(X) = X + (0, -1)$ és $\varphi(Y) = Y + (-1, 0)$, vagy fordítva. Nézzük ezt az esetet. Ez azt jelenti, hogy $X = Y + (-1, 1)$, vagyis $D(X) = D(Y)$. Ha $X = (x,y)$, akkor mivel X az S_1 fölött van, így $x < d_1(X)$, de $Y = (x+1, y-1)$

az S_1 alatt van, így $x+1 > d_1(X)$. Vagyis azt kaptuk, hogy $x+1 > d_1(X) > x$, ami nem lehet, ugyanis $d_1(X)$ egész szám, így nem lehet két egymást követő egész szám között, így ez ellentmondás. Tehát beláttuk, hogy φ bijekció a két halmaz között.

Eddig összefoglalva, az algoritmussal kapott új fedésben S_1 nem metsző diszjunkt monoton utak és két részre vágott monoton csökkenő utak szerepelnek. A következő lemmában megmutatom, hogy ezen monoton utak és részek semelyike sem metszhet bele az S_1 feletti és alatti részbe egyszerre.

1. lemma. *Ha egy R-beli monoton út nem metszi S_1-et, akkor minden pontja vagy S_1 fölötti, vagy S_1 alatti.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy valamely T monoton út nem metszi S_1-et, mégis van S_1 fölötti és S_1 alatti pontja. Ekkor van két egymást követő pontja, ahol az egyik S_1 alatti, a másik S_1 fölötti. Legyen ez a két pont X és Y, s tegyük fel, hogy X az S_1 feletti, Y az S_1 alatti. Legyen $X=(x,y)$, ekkor $d_1(X) \geq x+1$ és $d_2(X) \leq y-1$.

Ha $Y=(x+1,y)$, akkor mivel az Y pont S_1 alatti, így $d_1(Y) \leq x$ és $d_2(Y) \geq y+1$, vagyis $D(X) \nearrow D(Y)$ és $D(Y) \nearrow D(X)$ sem teljesül $d_1(Y) < d_1(X)$ és $d_2(Y) > d_2(X)$ miatt, tehát $D(X)$ és $D(Y)$ nem lehet rajta egyszerre a monoton növekvő S_1 úton, ami ellentmondás.

Ha $Y=(x,y+1)$, akkor $d_1(Y) \leq x-1$, $d_2(Y) \geq y+2$, így szintén nem teljesül $D(X) \nearrow D(Y)$ és $D(Y) \nearrow D(X)$ egyike sem.

Ha $Y=(x-1,y)$, akkor $d_1(Y) \leq x-2$ és $d_2(Y) \geq y+1$, vagyis nem teljesül $D(X) \nearrow D(Y)$ és $D(Y) \nearrow D(X)$ egyike sem, ami ellentmondás.

Ha $Y=(x,y-1)$, akkor $d_1(Y) \leq x-1$ és $d_2(Y) \geq y$, nem teljesül $D(X) \nearrow D(Y)$ és $D(Y) \nearrow D(X)$ egyike sem, ami nem lehet.

Ezzel a lemma be van bizonyítva. ■

Mivel φ az S_1 feletti és az S_1 alatti pontokat csak eltolja, és S_1 nem metszi semelyik másik monoton utat sem a fedésben, így a lemma következménye, hogy monoton út képe monoton út maradt. Ezenkívül a 7. esetben kapott monoton csökkenő S_k^1 út végpontja vagy $(u-1,v+1)$, vagy $(u,v+2)$ alakú, ahol (u,v) és $(u+1,v+1)$ is része S_1-nek, így $D\big((u-1,v+1)\big)=(u,v)$ és $D\big((u,v+2)\big)=(u+1,v+1)$, tehát S_k^1 végpontja mindenképp S_1 feletti, így S_k^1 minden pontja S_1 feletti. Így $\varphi\big(S_k^1\big)$ végpontja vagy $(u-1,v)$, vagy $(u,v+1)$, így hozzávéve az (u,v) pontot, $\varphi\big(S_k^1\big)$ monoton csökkenő út marad. Hasonlóan S_k^2 kezdőpontja $(u+1,v)$, ahol $(u,v+1)$ pontja S_1-nek, így $D\big((u+1,v)\big)=(u,v+1)$, amiből $(u+1,v)$ az S_1 alatti pont, és így S_k^2 minden pontja S_1 alatti. Ekkor $\varphi\big(S_k^2\big)$ kezdőpontja (u,v). Vagyis a

$$\varphi(S_k)=\varphi\big(S_k^1\big)\cap\varphi\big(S_k^2\big)$$

monoton csökkenő út lesz.

Tehát megkaptuk R' fedését a diszjunkt $\varphi(S_2),\varphi(S_3),\ldots,\varphi(S_t)$ utakkal, ahol R' egy $(a-1)\times(b-1)$ méretű táblázat, így az indukció alapján $t-1 \geq a-1$, s így $t \geq a$, vagyis az állítás be van bizonyítva. ■

4.2. Téglalapok fedése minimális számú monoton úttal. Először nézzük azt az egyszerű esetet, amikor csak monoton növekvő utakat engedünk meg a fedésben. Ha egy $a \times b$ méretű téglalapot fedünk, ahol $a \leq b$, akkor a darab monoton növekvő út nyilván elég a fedéshez, mivel az oszlopok monoton növekvő utak. Könnyen megmutatható, hogy ennél kevesebb viszont nem elég.

6. állítás. *Legyenek $a \leq b$ pozitív egészek, és legyen*

$$R = \{(x,y) \mid x = 0,1,\dots,a-1;\ y = 0,1,\dots,b-1\}$$

az $a \times b$ méretű téglalap. Tegyük fel, hogy $S_1, \dots, S_t$ monoton növekvő utak úgy, hogy $R = \bigcup_{i=1}^{t} S_i$. Ekkor $t \geq a$.

Bizonyítás. Tekintsük a

$$H = \{(a-1,0),(a-2,1),\dots,(0,a-1)\}$$

halmazt. Mivel $a \leq b$, így ez részhalmaza R-nek, tehát

$$H \subseteq \bigcup_{i=1}^{t} S_i.$$

Ám könnyen látható, hogy H semelyik két pontja sem lehet egy monoton növekvő úton, így szükségképpen $t \geq |H| = a$, s ezzel az állítás be van bizonyítva. ∎

Az már nehezebb eset, ha a fedésben megengedünk monoton növekvő és csökkenő utakat is egyszerre. Adható egy egyszerű alsó becslés, hogy legalább hány út kell, ha észrevesszük, hogy egy monoton út legfeljebb $a+b-1$ pontot fedhet le egy $a \times b$ méretű téglalapból, így legalább

$$\left\lceil \frac{ab}{a+b-1} \right\rceil$$

út kell, ahol ha $a \leq b$, akkor ez nagyobb, mint $\frac{a}{2}$. Hogyha b jóval nagyobb a-nál, pontosabban $b > (a-1)^2$, akkor

$$\frac{ab}{a+b-1} > a-1,$$

azaz legalább a út kell, ami éles. Ezek után mi azt az esetet nézzük, ha $a = b$.

8. tétel. *Legyen n egy pozitív egész és legyen*

$$R = \{(x,y) \mid x = 0,1,\dots,n-1;\ y = 0,1,\dots,n-1\}$$

az $n \times n$ méretű négyzet. Tegyük fel, hogy $S_1, \dots, S_t$ monoton utak úgy, hogy $R = \bigcup_{i=1}^{t} S_i$. Ekkor $t \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.

Bizonyítás. A bizonyítás lényege, hogy megszámoljuk, legfeljebb hány pontot fedhet le t monoton út a négyzetből. Ezt pedig úgy lehet megszámolni, hogy a t monoton út által lefedett pontokat lefedjük másik t monoton úttal, amelyek uniója maximális elemszámú.

A monoton növekvő utak egy $T_1, T_2, \ldots, T_k$ rendszerét nevezzük *k-ideálisnak,* ha teljesül rájuk, hogy páronként diszjunktak, és T_l kezdőpontja a

$$K = \{(0,0), (0,1), \ldots, (0,k-1)\}$$

halmazból való, végpontja pedig a

$$V = \{(n-k, n-1), (n-k+1, n-1), \ldots, (n-1, n-1)\}$$

halmazból. Mivel $|K| = |V| = k$, így a diszjunktság miatt minden K-beli elem pontosan egy monoton út kezdőpontja, és minden V-beli elem egy monoton út végpontja, így ha T_i kezdőpontja (x_i, y_i), végpontja (u_i, v_i), akkor

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} T_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |T_i| = \sum_{i=1}^{k} (u_i - x_i) + (v_i - y_i) + 1 =$$

$$= k + \Big(\sum_{(u,v)\in V} (u+v)\Big) - \Big(\sum_{(x,y)\in K} (x+y)\Big),$$

és ez tovább egyenlő

$$k + \Big(\sum_{i=1}^{k} ((n-i) + (n-1))\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{k} (i-1)\Big) = k(2n-k),$$

vagyis egy k-ideális rendszer összesen $k(2n-k)$ pontot fed le.

Ezután legyen

$$L_m = \{(x,y) \mid x + y = m\} \cap R$$

és a monoton növekvő utak egy $U_1, U_2, \ldots, U_k$ rendszerét nevezzük *k-maximálisnak,* ha U_l kezdőpontja a $(0,0)$ pont, végpontja az $(n-1, n-1)$ pont, és teljesül rájuk, hogy

$$\left|L_m \cap \bigcup_{i=1}^{k} U_i\right| = \min\{k, |L_m|\},$$

ha $m = 1, 2, \ldots, 2n-2$.

2. lemma. *Legyen $k < n$ pozitív egész és $U_1, U_2, \ldots, U_k$ egy k-maximális rendszer, ekkor létezik $T_1, \ldots, T_k$ k-ideális rendszer, hogy*

$$\bigcup_{i=1}^{k} U_i = \bigcup_{i=1}^{k} T_i.$$

Bizonyítás. Mivel U_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ kezdőpontja a $(0, 0)$, végpontja az $(n-1, n-1)$, így $m = 0, 1, \ldots, 2n-2$ esetén az $U_i \cap L_m$ halmaz pontosan egyelemű, így legyen $A_i \in U_i \cap L_{k-1}$ és $B_i \in U_i \cap L_{2n-k-1}$. Legyen U_i' az U_i-nek azon szakasza, amelynek kezdőpontja A_i, végpontja B_i. Vegyük észre, hogyha $k-1 \le m \le 2n-k-1$, akkor $|L_m| \ge k$, különben pedig kisebb, mint k, így

$$\left| L_m \cap \bigcup_{i=1}^{k} U_i \right| = \min\{k, |L_m|\}$$

miatt $k-1 \le m \le 2n-k-1$ esetén

$$\left| L_m \cap \bigcup_{i=1}^{k} U_i \right| = k,$$

vagyis mivel bármely monoton növekvő út legfeljebb egy helyen metszheti L_m-et, így minden út különböző pontban fogja metszeni, vagyis az $U_1', U_2', \ldots, U_k'$ monoton növekvő utak páronként diszjunktak. Ezenkívül ha $1 \le m < k-1$, vagy $2n-k-1 < m \le 2n-2$, akkor

$$\left| L_m \cap \bigcup_{i=1}^{k} U_i \right| = |L_m|,$$

vagyis

$$\left(\bigcup_{m=1}^{k-2} L_m \right) \cup \left(\bigcup_{m=2n-k}^{2n-2} L_m \right) \subset \bigcup_{i}^{k} U_i.$$

Tegyük fel, hogy $A_i = (p, k-1-p)$, $B_i = (q, 2n-k-1-q)$, és legyen T_i az az út, amely a következő 3 szakaszból tevődik össze: az első szakasz a

$$(0, k-1-p), (1, k-1-p), \ldots, (p-1, k-1-p)$$

pontokból áll, a következő szakasz az U_i', míg a harmadik szakasz a

$$(q, 2n-k-q), (q, 2n-k-q+1), \ldots, (q, 2n-1)$$

pontokat tartalmazza. Ekkor T_i egy monoton növekvő út, és T_i kezdőpontja a $K = \{(0,0), (0,1), \ldots, (0, k-1)\}$ halmazból, végpontja pedig a $V = \{(n-k, n-1), (n-k+1, n-1), \ldots, (n-1, n-1)\}$ halmazból való, ezenkívül könnyen átgondolható, hogy a $T_1, \ldots, T_k$ utak páronként diszjunktak, így ez egy k-ideális rendszer, amire

$$\bigcup_{i=1}^{k} U_i = \bigcup_{i=1}^{k} T_i.$$

Ezzel a lemma be van bizonyítva. ■

3. lemma. *Legyenek S és T tetszőleges $(0,0)$ kezdőpontú és $(n-1,n-1)$ végpontú monoton növekvő utak R-ben. Ekkor léteznek S' és T' monoton növekvő utak úgy, hogy $S \cup T \subset S' \cup T'$, és minden olyan $X \in R$ pontra, melyre $X + (-1,1) \in R$ és $X \in (S \cap T)$ teljesül, arra $X + (-1,1) \in S' \cup T'$, és léteznek olyan S'' és T'' monoton növekvő utak, hogy $S \cup T \subset S'' \cup T''$ és minden $X \in R$ pontra, melyre $X + (1,-1) \in R$ és $X \in (S \cap T)$ teljesül, arra $X + (1,-1) \in S'' \cup T''$.*

Bizonyítás. Most csak a $(-1,1)$ esetet bizonyítom, a másik teljesen hasonlóan megy. Legyen

$$H = \left((S \cup T) \cup \left(\bigcup_{X \in S \cap T} \{X + (-1,1)\} \right) \right) \cap R,$$

azaz H azon pontok halmaza, amit le akarunk fedni az S' és T' monoton növekvő utakkal. Definiáljuk S'-t és T'-t a következőképpen: legyen S' az az $(X_1, \dots, X_{2n-1})$ sorozat, amire $X_1 = (0,0)$ és $X_{i+1} = X_i + (1,0)$, ha $X_i + (1,0) \in H$, és $X_{i+1} = X_i + (0,1)$ különben $(i = 1, 2, \dots, 2n-2)$, és legyen T' az az $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ sorozat, amelyre $Y_1 = (0,0)$ és $Y_{i+1} = Y_i + (0,1)$, ha $Y_i + (0,1) \in H$, és $Y_{i+1} = Y_i + (1,0)$ különben. Ekkor könnyen látható, hogy S' és T' monoton növekvő utak. Megmutatom, hogy $H = S' \cup T'$.

Tekintsük $m = 0, 1, \dots, 2n-2$ esetén az $L_m \cap H$ halmazt. Ez a halmaz legfeljebb 2 elemű, ugyanis ha $L_m \cap \big(H \setminus (S \cup T)\big)$ üres, akkor mivel az $L_m \cap S$ és $L_m \cap T$ halmazok is legfeljebb 1 eleműek, így az $L_m \cap (S \cup T) = L_m \cap H$ halmaz legfeljebb kételemű. Ha pedig $L_m \cap \big(H \setminus (S \cup T)\big)$ nem üres, akkor az azt jelenti, hogy valamely $X \in S \cap T$-re $X + (-1,1) \in L_m$, ám ekkor $X \in L_m$, vagyis S és T metszete L_m-mel az X pont, tehát $L_m \cap H$-nak két eleme van, X és $X + (-1,1)$. Könnyen látható, hogy S' elemei az L_m halmazok azon pontjai lesznek, melyeknek nagyobb az x koordinátájuk, míg T' pontjai azok, melyeknek az y koordinátájuk nagyobb. Ezzel a lemma be van bizonyítva. ∎

4. lemma. *Legyen $k < n$ pozitív egész szám és $S_1, S_2, \dots, S_k$ tetszőleges monoton növekvő utak. Ekkor létezik k-maximális rendszer $U_1, \dots, U_k$, amelyre*

$$\bigcup_{i=1}^{k} S_i \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i.$$

Bizonyítás. Ha az S_i monoton növekvő út $(i = 1, \dots, k)$ kezdőpontja nem a $(0,0)$ pont, akkor rakhatunk az elejére néhány pontot úgy, hogy monoton növekvő út maradjon, és a $(0,0)$-tól kezdődjön, s a végére is rakhatunk néhány pontot, hogy az $(n-1, n-1)$ pont legyen a végpontja. Tehát ezután tegyük fel, hogy S_i a $(0,0)$ ponttól az $(n-1, n-1)$ pontig halad.

Ha $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_k\}$ monoton növekvő utak egy rendszere és $X \in R$ egy tetszőleges pont, akkor jelölje $s(\mathcal{S}, X)$ azon $\mathcal{S}$-beli monoton növekvő utak számát, amelyek tartalmazzák X-et. Ekkor ha valamely $X \in R$-re $s(\mathcal{S}, X) \geq 2$ és $X + (-1,1) \in R$, akkor létezik olyan $\mathcal{S}'$ k-elemű halmaz monoton növekvő utakból, hogy

$$s\big(\mathcal{S}', X + (-1,1)\big) = s\big(\mathcal{S}, X + (-1,1)\big) + 1,$$

és $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \subset \bigcup_{S' \in \mathcal{S}'} S'$. Ez az előző lemma következménye, ugyanis ha $S, T \in \mathcal{S}$ két monoton növekvő út, melyekre $X \in S \cap T$, akkor létezik S', T' monoton növekvő út, hogy $S \cup T \subset S' \cup T'$ és $X + (-1,1) \in S' \cup T'$, így ha $\mathcal{S}$-ben kicseréljük S, T-t S', T'-re, akkor az így kapott $\mathcal{S}'$ halmaz megfelelő lesz. (Ugyanez elmondható a megfelelő feltételekkel $X + (1,-1)$-ről is.)

Ha az $\mathcal{S}$ halmaz nem k-maximális rendszer, akkor létezik olyan $0 \leq m \leq 2n-2$ egész, hogy

$$\left| \Big(\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \Big) \cap L_m \right| < \min \{k, |L_m|\}.$$

Ám mivel minden $S \in \mathcal{S}$ esetén $S \cap L_m = 1$, így

$$\sum_{X \in L_m} s(\mathcal{S}, X) = k,$$

vagyis ekkor valamely $X \in L_m$ esetén $s(\mathcal{S}, X) \geq 2$. Legyen $Y \in L_m$ az X-hez legközelebbi olyan pont, amelyre $s(\mathcal{S}, Y) = 0$, és legyen $Y = X + r \cdot (-1,1)$. Nézzük, ha $r > 0$. Legyen $\mathcal{S}^0 = \mathcal{S}$ és $X^0 = X$. Ismételjük a következő algoritmust: ha $s(\mathcal{S}^q, X^q) \geq 2$, akkor cseréljük ki $\mathcal{S}^q$-t arra az $\mathcal{S}^{q+1}$ halmazra, ahol

$$s\big(\mathcal{S}^{q+1}, X^q + (-1,1)\big) = s\big(\mathcal{S}^q, X^q + (-1,1)\big) + 1$$

és $\bigcup_{S \in \mathcal{S}^q} S \subset \bigcup_{S \in \mathcal{S}^{q+1}} S$, és legyen $X^{q+1} = X^q + (-1,1)$. Ekkor ha $q < r-1$, akkor $s\big(\mathcal{S}, X^{q+1}\big) \geq 1$, mivel Y a legközelebbi pont, amire ez az érték 0. Így

$$s\big(\mathcal{S}^{q+1}, X^{q+1}\big) \geq 2,$$

vagyis folytathatjuk az algoritmust, amíg $q = r-1$, s utána azt kapjuk, hogy $s(\mathcal{S}^r, X^r = Y) = 1$, vagyis $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \subset \bigcup_{S \in \mathcal{S}^r} S$ és

$$Y \in \bigcup_{S \in \mathcal{S}^r},$$

de

$$Y \notin \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S,$$

szóval

$$\left| \bigcup_{S \in \mathcal{S}^r} S \right| > \left| \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \right|.$$

(Ugyanígy járhatunk el, ha r negatív, de akkor $(1,-1)$-et adunk X^q-hoz, és $|r|$ lépés lesz.) Tehát ha $\mathcal{S}$ nem k-maximális rendszer, akkor létezik olyan $\mathcal{S}'$ halmaz, amelyben a monoton növekvő utak több pontot fednek le R-ből, és tartalmazzák az $\mathcal{S}$-beli utak által lefedett pontokat. Mivel legfeljebb $|R|$ pontot fedhetnek le a monoton növekvő utak, így minden nem k-maximális rendszert egy nála (a lefedett pontok tekintetében) nagyobbal helyettesítve véges sok lépésen belül kapunk egy k-maximális rendszer, ami tartalmazza az összes $\mathcal{S}$-beli monoton növekvő út által lefedett pontot. Ezzel a lemma be van bizonyítva. ■

Most nézzük az állítás bizonyítását. Legyenek $S_1, S_2, \ldots, S_k$ az $S_1, \ldots, S_t$ közül a monoton növekvő utak, $S_{k+1}, \ldots, S_t$ a monoton csökkenő utak. Ekkor a lemmák alapján létezik olyan $T_1, \ldots, T_k$ k-ideális rendszer, ami tartalmazza az $S_1, \ldots, S_k$ utak által lefedett pontokat, és ugyanez elmondható a monoton csökkenő utakra is, azaz létezik $T_{k+1}, \ldots, T_t$ $t-k$-ideális rendszer, ami lefedi az $S_{k+1}, \ldots, S_t$ által lefedett pontokat, s itt $T_{k+1}, \ldots, T_t$ olyan utak, melyek kezdőpontja a $K = \big\{(0, n-1), (0, n-2), \ldots, (0, n-(t-k))\big\}$ halmazból való, végpontja pedig az $V = \big\{\big(n-(t-k), 0\big), \big(n-(t-k)+1, 0\big), \ldots, (n-1, 0)\big\}$ halmazból. Vegyük észre, hogy T_i és T_{k+j} metszik egymást ($i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, t-k$), ha $t < n$, mivel T_i kezdőpontja $(0, p)$ alakú, ahol $0 \le p \le k-1$ és T_{k+j} kezdőpontja $(0, q)$ alakú, ahol $n-1 \ge q \ge n-(t-k)$, tehát $p < q$, de T_i végpontja $(p', n-1)$ alakú, T_{k+j} végpontja pedig $(q', 0)$ alakú, ahol $n-1 > 0$, így szükségképpen metszik egymást (ha $t \ge n$, akkor kész vagyunk, mivel $n \ge \lceil \frac{2n}{3} \rceil$). Mivel a $T_1, \ldots, T_k$ utak páronként diszjunktak, és a $T_{k+1}, \ldots, T_t$ utak is páronként diszjunktak, így a $T_i \cap T_{k+j}$ metszetek is páronként diszjunktak. Összefoglalva az eddigieket:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{t} S_i\right| \le \left|\left(\bigcup_{i=1}^{k} T_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{t-k} T_{k+j}\right)\right| =$$

$$= \left|\bigcup_{i=1}^{k} T_i\right| + \left|\bigcup_{j=1}^{t-k} T_{k+j}\right| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{k} T_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{t-k} T_{k+j}\right)\right|.$$

Mivel egy l-ideális rendszer összesen $l(2n-l)$ pontot fed le, így ez tovább egyenlő:

$$k(2n-k) + (t-k)\big(2n-(t-k)\big) - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{k} T_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{t-k} T_{k+j}\right)\right|,$$

ahol a metszet legalább $k(t-k)$, mivel bármely (i,j) párhoz tartozik legalább $T_i \cap T_{k+j}$-beli pont ($i = 1, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, t-k$). Tehát a fenti kifejezés kisebb, mint

$$k(2n-k) + (t-k)\big(2n-(t-k)\big) - k(t-k).$$

Vagyis ha az $S_1, \ldots, S_t$ utak valóban lefedték az R-t, akkor szükségképpen

$$k(2n-k) + (t-k)\big(2n-(t-k)\big) - k(t-k) \ge |R| = n^2.$$

Ezt alakítva:

$$\begin{aligned} 2nt - k^2 - (t-k)^2 - k(t-k) &\geq n^2, \\ 2nt - t^2 + k(t-k) &\geq n^2, \\ k(t-k) &\geq (n-t)^2. \end{aligned}$$

Itt a $k(t-k)$ szorzatot felülről becsülhetjük $\left(\frac{t}{2}\right)^2$-tel, így azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{t}{2}\right)^2 \geq (n-t),$$

vagyis

$$\frac{t}{2} \geq n - t,$$

$$t \geq \frac{2n}{3},$$

s mivel t egész szám, így $t \geq \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$. ∎

9. tétel. *Ha n egy pozitív egész és*

$$R = \{(x,y) \mid x = 0,1,\ldots,n-1;\ y = 0,1,\ldots,n-1\}$$

az $n \times n$-es négyzetrács, akkor léteznek $S_1, \ldots, S_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil}$ monoton utak, hogy

$$\bigcup_{i=1}^{\lceil \frac{2n}{3} \rceil} S_i = R.$$

Bizonyítás. Elég azt az esetet nézni, ha $n = 3m$, ahol m egész szám, ugyanis ha $n = 3m+1$, akkor $\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil = 2m+1$, és ha a $3m \times 3m$ méretű négyzetrács le van fedve $2m$ monoton úttal, akkor az

$$S_{2m+1} = \big((0,3m),(1,3m),\ldots,(3m,3m),(3m,3m-1),\ldots,(3m,0)\big)$$

monoton csökkenő utat hozzávéve megkaptuk a $(3m+1) \times (3m+1)$-es négyzetrács fedését $2m+1$ monoton úttal. Hasonlóan, ha $n = 3m+2$, akkor $\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil = 2m+2$, és ha a $(3m+1) \times (3m+1)$-es négyzetrács le van fedve $2m+1$ monoton úttal, akkor hozzávéve az

$$\begin{aligned} S_{2m+2} = \big((0,3m+1),(1,3m+1),\ldots,(3m+1,3m+1),\\ (3m+1,3m),\ldots,(3m+1,0)\big) \end{aligned}$$

monoton csökkenő utat, megkaptuk a $(3m+2) \times (3m+2)$-es négyzetrács fedését $2m+2$ monoton úttal.

Tehát nézzük, ha $n = 3m$. Legyen $i = 1, 2, \ldots, m$ esetén

$$\begin{aligned} S_i = \big((0, i-1), (1, i-1), \ldots, (2m-i, i-1), (2m-i, i), \ldots, (2m-i, 2m+i-1), \\ (2m-i+1, 2m+i-1), \ldots, (3m-i, 2m+i-1), \\ (3m-i, 2m+i), \ldots, (3m-i, 3m-1)\big), \end{aligned}$$

és legyen

$$\begin{aligned} S_{i+m} = \big((i-1, 3m-1), (i-1, 3m-2), \ldots, (i-1, m+i-1), \\ (i, m+i-1), \ldots, (2m+i-1, m+i-1), \\ (2m+i-1, m+i-2), \ldots, (2m+i-1, i-1), \\ (2m+i, i-1), \ldots, (3m-1, i-1)\big). \end{aligned}$$

Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy $S_1, S_2, \ldots, S_m$ páronként diszjunkt monoton növekvő utak (m-ideális fedés), így $m(2n-m) = 5m^2$ pontot fednek le, $S_{m+1}, \ldots,$ S_{2m} pedig páronként diszjunkt monoton csökkenő utak, így ezek is $5m^2$ pontot fednek le R-ből. Ezenkívül $S_i \cap S_{m+j} = \big\{(2m-i, m+j-1)\big\}$, ha $i, j = 1, \ldots, m$, vagyis az $S_i \cap S_{m+j}$ halmazok egyeleműek és páronként különbözők, így mivel m^2 darab (i, j) pár van, így

$$\left|\left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} S_{m+j}\right)\right| = m^2.$$

Vagyis mindent összevetve

$$\begin{aligned} \left|\bigcup_{i=1}^{2m} S_i\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} S_{m+j}\right)\right| = \\ = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i\right)\right| + \left|\left(\bigcup_{j=1}^{m} S_{m+j}\right)\right| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} S_{m+j}\right)\right| = \\ = 5m^2 + 5m^2 - m^2 = 9m^2 = |R|, \end{aligned}$$

tehát a megadott $2m$ darab út valóban lefedi R-t. Ezzel az állítás be van bizonyítva. ■

5. Konvex rácsponthalmazok fedése monoton utakkal

Ebben a részben az általános rácsponthalmazok helyett a szabályosabb konvex rácsponthalmazokat vizsgáljuk, amin azt kell érteni, hogy olyan H halmazok monoton utakkal való fedéseiről beszélünk, amikre teljesül, hogy a H konvex burkában lévő minden rácspont is eleme H-nak. Az ilyen kérdések tárgyalása során sokmindent felhasználhatunk a konvex sokszögek geometriai tulajdonságaiból. Először is definiáljuk a konvex rácsponthalmaz fogalmát:

4. definíció. Ha $H \subset \mathbb{Z}^2$ egy véges halmaz, és minden $X \in \mathbb{Z}^2$-re, amire $X \in \operatorname{conv}(H)$ teljesül, igaz hogy $X \in H$, akkor H egy konvex rácsponthalmaz.

10. tétel. *Legyen H egy n elemű konvex rácsponthalmaz. Ekkor megadható monoton utak egy $S_1, S_2, \ldots, S_m$ rendszere, amely vagy csupa monoton növekvő útból, vagy csupa monoton csökkenő útból áll, ezenkívül lefedik H-t és*

$$m \leq \left\lceil \sqrt[4]{3}\sqrt{n} \right\rceil.$$

A következő lemmát bizonyítás nélkül közlöm, megtalálható Yaglom és Boltyanskii [1] könyvében, mint 70. probléma.

5. lemma. *Legyen P egy t területű konvex sokszög. Ekkor létezik olyan l egyenes, amelyre P-t merőlegesen levetítve P vetülete legfeljebb $\sqrt[4]{3}\sqrt{t}$.*

6. lemma. *Egy l egyenes esetén, melynek $\mathbf{n}$ a pozitív irányba vett normálvektora, legyen*

$$\psi(l) = \{L + c\mathbf{n} \mid L \in l;\ 0 \leq c < 1\}.$$

Ekkor bármely néhány rácspontot kiválasztva $\psi(l)$-ben, azok lefedhetők egy monoton úttal, méghozzá ha l meredeksége nem negatív, akkor monoton növekvő úttal, ha l meredeksége nem pozitív, akkor monoton csökkenő úttal.

Bizonyítás. Nézzük azt az esetet, ha l meredeksége nem negatív, a másik eset teljesen hasonlóan bizonyítható. Legyen $X, Y \in \psi(l)$ két tetszőleges rácspont; ekkor megmutatom, hogy $X \nearrow Y$ vagy $Y \nearrow X$. Tegyük fel indirekt, hogy egyik sem igaz, és legyen $X = (x_1, y_1)$, $Y = (x_2, y_2)$. Ekkor az indirekt feltevés miatt $x_1 \neq x_2$, így feltehetjük, hogy $x_1 < x_2$, s ekkor az indirekt feltevés alapján $y_1 > y_2$. Mivel $X, Y \in \psi(l)$, így létezik olyan $0 \leq c_1, c_2 < 1$ és $L_1, L_2 \in l$, hogy $X = L_1 + c_1\mathbf{n}$ és $Y = L_2 + c_2\mathbf{n}$, ahonnan $L_1 = X - c_1\mathbf{n}$ és $L_2 = Y - c_2\mathbf{n}$. Legyen $\mathbf{n} = (m, n)$, ekkor

$$L_1 - L_2 = (x_1 - x_2 - (c_1 - c_2)m, y_1 - y_2 - (c_1 - c_2)n).$$

Itt $|c_1 - c_2| < 1$ és $|\mathbf{n}| = \sqrt{m^2 + n^2} = 1$ miatt $|n|, |m| \leq 1$, vagyis

$$x_1 - x_2 - (c_1 - c_2)m \leq x_1 - x_2 + |c_1 - c_2|\,|m| < x_1 - x_2 + 1 \leq 0,$$

és

$$y_1 - y_2 - (c_1 - c_2)n \geq y_1 - y_2 - |c_1 - c_2|\,|n| > y_1 - y_2 - 1 \geq 0.$$

De L_1 és L_2 is rajta van l-en, így ebből kiszámolva l meredekségét:

$$\frac{y_1 - y_2 - (c_1 - c_2)n}{x_1 - x_2 - (c_1 - c_2)m} < 0,$$

ami ellentmondás. Tehát $X \nearrow Y$ vagy $Y \nearrow X$ bármely két $\psi(l)$-beli rácspontra, így ha $H \subset \psi(l)$ rácspontok egy véges halmaza, akkor a 4. *állítás* alapján létezik S monoton növekvő út, amely tartalmazza H összes pontját, s ezzel a lemma be van bizonyítva. ■

Most nézzük az állítás bizonyítását. Legyen $P = \operatorname{conv}(H)$, t a P területe, és legyen l egy olyan egyenes, amelyre P-t levetítve a vetület hossza minimális. Legyen a vetület q, és osszuk fel l-t egység hosszúságú szakaszokra úgy, hogy q egyik végpontja valamely osztópontra essen. Ekkor q-t lefedi legfeljebb $\lceil \sqrt[4]{3}\sqrt{t} \rceil$ darab egységhosszúságú szakasz, legyenek ezek $r_1, \ldots, r_m$; ekkor $q \subset \bigcup_{i=1}^{m} r_i$. Állítsunk r_i azon végpontjába egy merőleges egyenest l-re, amelyre r_i pozitív irányba vett normálvektora lesz ezen egyenesnek, és legyen ezen egyenes l_i. Legyen ψ a lemmában definiált függvény. Ekkor

$$P \subset \bigcup_{i=1}^{m} \psi(l_i),$$

mivel ha egy $X \in P$ pontot levetítünk l-re, akkor a képe benne lesz valamely r_i-ben, s ekkor $X \in \psi(l_i)$. Tehát megkaptuk, hogy

$$H \subset \bigcup_{i=1}^{m} \psi(l_i),$$

vagyis ha S_i az a monoton út, amely lefedi a $H \cap \psi(l_i)$ halmazt, akkor az $S_1, S_2, \ldots, S_m$ monoton utak lefedik H-t, s mivel az $l_1, \ldots, l_m$ egyenesek meredeksége megegyezik, így az $S_1, \ldots, S_m$ mind monoton csökkenő, vagy mind monoton növekvő.

Legyen h a P határán lévő rácspontok, b a P belsejében lévő rácspontok száma, ekkor $|H| = n = b + h$, és a Pick-tétel alapján $t = b + \frac{h}{2} - 1$, így $t < n$, vagyis

$$m \leq \lceil \sqrt[4]{3}\sqrt{t} \rceil \leq \lceil \sqrt[4]{3}\sqrt{n} \rceil .$$

Ezzel az állítás be van bizonyítva. ■

Ennél élesebb állítás is igaz:

11. tétel. *Legyen H egy n elemű konvex rácsponthalmaz. Ekkor megadható monoton utak egy $S_1, S_2, \ldots, S_m$ rendszere, amely vagy csupa monoton növekvő útból, vagy csupa monoton csökkenő útból áll, ezenkívül lefedik H-t és*

$$m \leq \lceil \sqrt{n} \rceil .$$

Bizonyítás. Tekintsünk H-ra, mint egy $\nearrow$-szerint rendezett POSET-re. Ekkor bármely lánc elemei lefedhetők egy monoton növekvő úttal a 3. *állítás* alapján. Legyen p a minimális láncfelbontás elemszáma, ekkor a Dilworth-tétel [3] alapján ez megegyezik a maximális antilánc elemszámával. Legyen A az egyik maximális antilánc. Hasonlóan, ha most úgy tekintünk H-ra, mint egy $\searrow$-szerint rendezett POSET-re, akkor bármely lánc egy monoton csökkenő útnak felel meg. Legyen itt a minimális láncfelbontás elemszáma q, ekkor ez megegyezik a maximális antilánc elemszámával. Legyen a maximális antilánc a $\searrow$-szerinti rendezésben B.

Tegyük fel indirekt, hogy nem teljesül az állítás, ekkor mivel p, q egészek, így $|A| = p \geq \lceil\sqrt{n}\rceil + 1$ és $|B| = q \geq \lceil\sqrt{n}\rceil + 1$. Mivel A egy antilánc $\nearrow$-szerint, így bármely két $X, Y \in A$ pontra $X \searrow Y$, vagy $Y \searrow X$, tehát A pontjai lefedhetők egy monoton csökkenő úttal. Soroljuk fel A pontjait eszerint a monoton csökkenő út szerint: $X_1 \searrow X_2 \searrow \ldots \searrow X_p$. Ha $X_i = (x_i, y_i)$ $(i = 1, \ldots, p)$, akkor $x_i \leq x_{i+1}$, de $x_i = x_{i+1}$ nem lehet, ugyanis akkor $X_{i+1} \nearrow X_i$ teljesülne, ami ellentmond annak, hogy A antilánc, így $x_i < x_{i+1}$. S mivel az x_i-k egész számok, így $x_i + 1 \leq x_{i+1}$, vagyis $x_p \geq x_1 + p - 1$. Hasonlóan $y_i \geq y_{i+1}$, de ha $y_i = y_{i+1}$, akkor $X_i \nearrow X_{i+1}$, tehát szükségképpen $y_i > y_{i+1}$. S így $y_p \leq y(1) - (p-1)$. Legyen $\mathbf{v}$ az X_1-ből X_p-be mutató vektor, ekkor ha $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, akkor $v_1 \geq p - 1$ és $v_2 \leq -(p-1)$.

Ugyanezt megcsinálhatjuk B-ben is, azaz az elemeit sorba rendezhetjük $\nearrow$-szerint: $Y_1 \nearrow Y_2 \nearrow \ldots \nearrow Y_q$, és ha $\mathbf{w} = (w_1, w_2) = Y_q - Y_1$, akkor $w_1 \geq q - 1$ és $w_2 \geq q - 1$.

Ezek után becsüljük $\operatorname{conv}(H)$ területét:

$$\operatorname{conv}(H) \supseteq \operatorname{conv}(A \cup B) \supseteq \operatorname{conv}\big(\{X_1, X_p, Y_1, Y_q\}\big),$$

így $\operatorname{conv}(H)$ területe legalább akkora, mint $\operatorname{conv}\big(\{X_1, X_p, Y_1, Y_q\}\big)$ területe. Megmutatom, hogy ez a terület legalább $(p-1)(q-1)$. Ha az X_1X_p szakasz metszi az Y_1Y_q szakaszt, akkor a négy pont által kifeszített négyszög, vagy háromszög területe pontosan $\frac{1}{2}|v \times w|$, ahol

$$\frac{1}{2}|v \times w| = \frac{1}{2}|v_1w_2 - v_2w_1| \geq \frac{1}{2}\big((p-1)(q-1) + (p-1)(q-1)\big) = (p-1)(q-1).$$

Ha a két szakasz nem metszi egymást, akkor nézzünk két esetet. Ha az X_1, X_p, Y_1, Y_q pontok konvex burka egy háromszög, akkor feltehetjük, hogy X_1 a belső pont (a többi eset teljesen hasonló); ekkor hosszabbítsuk meg az X_1X_p szakaszt X_1-en túl, és legyen ennek a félegyenesnek az Y_1Y_q szakasszal vett metszéspontja M. Ekkor az X_p, Y_1, Y_q háromszög területe

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{MX_p} \times \overrightarrow{Y_1Y_q}| > \frac{1}{2}|v \times w| \geq (p-1)(q-1).$$

Ha X_1, X_p, Y_1, Y_q konvex burka egy $ABCD$ négyszög, ahol AB felel meg az X_1X_p, CD az Y_1Y_q szakasznak (pozitív és negatív iránytól eltekintve). Legyen N a BC és DA által meghatározott egyenesek metszéspontja, s tegyük fel, hogy A közelebb van N-hez, mint D, ekkor B is közelebb van N-hez, mint C. Legyen

$\lambda = \min\left\{\frac{ND}{NA}, \frac{NC}{NB}\right\}$, és nyújtsuk az AB szakaszt λ arányban, és legyen a képe $A'B'$. Ekkor $\lambda > 1$, így az $A'B'$ szakasz hossza nagyobb, mint az AB szakaszé, és $AB \parallel A'B'$, ezenkívül az A', B', C, D pontok egy háromszöget alkotnak, mivel $A' = D$, vagy $B' = D$. Ez a háromszög benne van az $ABCD$ négyszögben, így az $ABCD$ négyszög területe nagyobb, mint

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{CD}| > \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}| = \frac{1}{2}|v \times w| \geq (p-1)(q-1).$$

Tehát azt kaptuk, hogy a $\operatorname{conv}\{X_1, X_p, Y_1, Y_q\}$ területe legalább $(p-1)(q-1)$, amire az indirekt feltevés alapján

$$(p-1)(q-1) > \lceil \sqrt{n} \rceil^2 \geq n,$$

vagyis azt kaptuk, hogy $\operatorname{conv}(H)$ területe legalább n. Legyen h a $\operatorname{conv}(H)$ határán lévő rácspontok száma, b a belsejében lévő pontok száma; ekkor mivel H konvex rácsponthalmaz, így $|H| = n = b + h$, és a Pick-tétel alapján $\operatorname{conv}(H)$ területe $b + \frac{h}{2} - 1 < b + h = n$, így azt kaptuk, hogy $\operatorname{conv}(H)$ területe kisebb, mint n, ami ellentmondás. Ezzel az állítás be van bizonyítva. ∎

Ez az állítás már éles, ugyanis a 7. *tétel* alapján egy $m \times m$-es négyzetrács lefedéséhez vagy legalább m monoton növekvő, vagy legalább m monoton csökkenő út kell.

Irodalom

[1] Boltjanski, W. G., Jaglom, I. M., *Konvexe Figuren,* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (Berlin, 1956).

[2] Martin Aigner és Günter M. Ziegler, *Bizonyítások a könyvből,* Typotex (Budapest, 2004).

[3] *Dilworth theorem,* `http://en.wikipedia.org/wiki/Dilworth's_theorem`.

[4] *Pick's theorem,* `http://en.wikipedia.org/wiki/Pick's_theorem`.

Tomon István

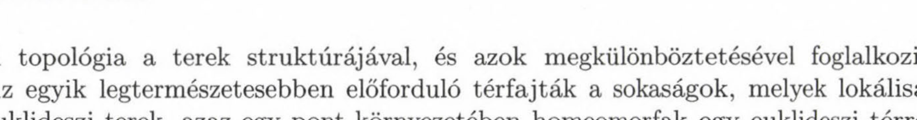
Eötvös University, Budapest

CSOMÓK ÉS SIMA 3-SOKASÁGOK – HEEGAARD–FLOER-HOMOLÓGIÁK

VÉRTESI VERA

1. Bevezetés

A topológia a terek struktúrájával, és azok megkülönböztetésével foglalkozik. Az egyik legtermészetesebben előforduló térfajták a sokaságok, melyek lokálisan euklideszi terek, azaz egy pont környezetében homeomorfak egy euklideszi térrel. A kompakt 0 dimenziós sokaságok véges sok pontból állnak. Az egyetlen összefüggő 1 dimenziós kompakt sokaság az S^1 körvonal. A kompakt irányítható 2 dimenziós sokaságokból végtelen sok van (1. ábra), melyeket a felület „lyukainak" száma: a felület *neme,* vagy *génusza* különböztet meg. Azonban 3- és 4 dimenzióban a helyzet



1. ábra. Irányítható felületek

lényegesen bonyolultabb, pl. tetszőleges fundamentális csoportú 4-sokaságok léteznek, és már ezen csoportok összehasonlítása is nehéz. Bizonyos sokaságokon lehet differenciálható függvényeket definiálni, ezek a *differenciálható* vagy *sima sokaságok.* Az egyszerűség kedvéért mostantól csak ilyenekkel foglalkozunk. Az alacsony dimenziós topológia hosszú távú feladata a sima 3-, illetve 4 dimenziós sokaságok valamilyen értelemben vett megértése, osztályozása. Az ilyen problémaköröknek két irányuk van: a konstrukciók, melyek segítségével le lehet írni sokaságokat, és az invariánsok, melyek segítségével pedig meg lehet őket különböztetni. Tetszőleges sima sokaságot le lehet írni egy fogantyúfelbontásával (3.1. alfejezet), mely a 4 dimenziós esetben a Kirby-kalkulust, 3 dimenziósban pedig a 3-sokaság Heegaard-felbontását adja (4.1. alfejezet). Sokszor hasznos a sokaságokat kisebb dimenziós építőkövekből, esetleg alacsonyabb dimenziós sokaságok (csavart) szorzataként előállítani. Persze nem minden sokaság áll így elő, de bizonyos szingularitások megengedésével már igen, 4 dimenziós esetben Lefschetz-fibrálásokat, 3 dimenziós esetben pedig nyílt könyv felbontásokat adva. Mivel minden 3-sokaság egy 4-sokaságnak a pereméként is előáll, ezért így is leírhatóak, mely segítségével a 3-sokaságokat műtétekkel is előállíthatjuk S^3-ból (7.2. alfejezet). Donaldson differenciáloperátorok megoldásainak segítségével definiált egy 4-sokaság invariánst, mely segítségével sikerült olyan 4-sokaságokat találni, melyek egymással homeomorfak, de nem diffeomorfak. Freedman munkásságából pedig olyan (topológikus) 4-sokaságok létezése következik, melyeken nem adható meg differenciálható struktúra. A fizikából eredő, szintén differenciáloperátorok megoldásait számláló invariáns a Seiberg–Witten-invariáns. Ennek létezik egy 3 dimenziós változata, amely a 3-sokaság egy elég hosszú intervallummal való szorzatán tekint egy hasonló differenciáloperátort. Ozsváth és Szabó a 3-sokaságok Heegaard-felbontásaihoz rendelt terek vizsgálatával definiált sok esetben egyszerűbben számítható invariánsokat, a Heegaard–Floer-homológiákat. A Heegaard–Floer-homológiának 4-sokaság invariánst adó változata (7.1. alfejezet), és 3-sokaságokban lévő csomóinvariáns változata is van (7.3. alfejezet).

Ez a jegyzet ismeretterjesztő jellegű, nagy része a [21, 22, 15, 10] összefoglaló dolgozatok alapján készült. Az elmélet teljesebb tárgyalása a [19, 18, 17] cikkekben található.

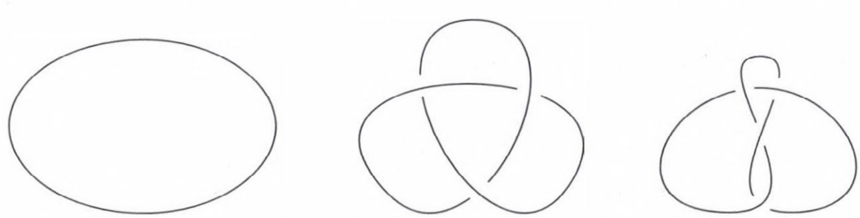
Köszönetnyilvánítás. Ezt a jegyzetet közvetlenül a doktori fokozatom védése után készítettem. Ezúton is szeretném megköszönni mindkét témavezetőm, Stipsicz András és Szabó Csaba segítségét és munkáját.

2. Csomók

Bevezetésképpen a topológikus invariánsok lényegét egy egyszerűbb példán, az euklideszi térbeli csomókon érzékeltetjük.

2.1. definíció. Egy *(sima) csomó* az S^1 körvonal beágyazott képe $\mathbb{R}^3$-ba (vagy S^3-ba).

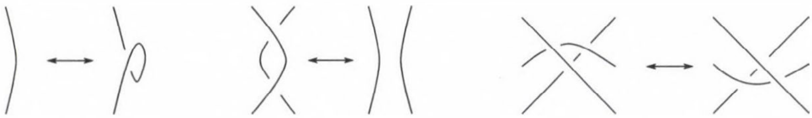
Mint az alábbi példákon (2. ábra) is, egy csomót általában az $\mathbb{R}^2$ síkra való generikus (háromszoros pontot és önmagát nem érintő) vetületével, és minden kétszeres pontban az alul-felül információt elkódoló megszakítással adunk meg. Az ilyen, alul-felül információt megszakítással jelző vetület a *csomó diagramja.* A csomó-



triviális csomó háromlevelű csomó nyolcascsomó

2. ábra. Néhány csomó vetülete

elmélet a csomókat próbálja klassszifikálni izotópia erejéig. Azonos diagramú csomók izotópok, úgyhogy ezzel az ábrázolással nem vesztünk információt. A csomó térbeli izotópiája során azonban változhat a diagram. A 3. ábra a csomódiagram ilyen lokális változásait, a *Reidemeister-lépéseket* szemlélteti. (Az R1 és R2 lépések tükörképei, és az R3 lépés tükörképe, illetve a középső metszés megváltoztatásával készült diagram is Reidemeister-lépést ad.)



3. ábra. Reidemeister-lépések (az ábrák lokálisak, a csomódiagram többi része változatlan)

Ezek a lépések elégségesek is, azaz:

2.2. tétel [28, 1]. *Két diagram pontosan akkor tartozik izotóp csomókhoz, ha véges sok Reidemeister-lépéssel és síkbeli (az alul-felül információt megőrző) izotópiával egymásba deformálható.* ∎

Ennek a tételnek a segítségével könnyű bebizonyítani két diagramról, hogy a hozzájuk rendelt csomók izotópak; egyszerűen megmutatjuk a két csomódiagramot egymásba vivő Reidemeister-lépések sorozatát. Azonban ha a csomók nem izotópak, sokkal nehezebb dolgunk van; meg kéne tudni mutatni, hogy nincs ilyen sorozat. Ezért van szükség invariánsok bevezetésére. Egy csomóinvariáns a csomók izotópiaosztályaihoz hozzárendelt mennyiség/struktúra, amely tehát ha két csomóra kiszámolva különböző, akkor a két csomó nem izotóp.

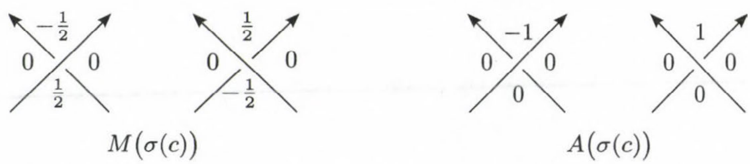
Egy könnyen definiálható csomóinvariáns a csomó génusza, melynek definiciója azon múlik, hogy S^3-ban minden csomó határol irányítható felületet, melyet a csomó *Seifert-felületének* nevezünk.

2.3. definíció. Egy K csomó $g(K)$ *génusza* a csomó Seifert-felületeinek génuszainak minimuma. Egy csomó *fibrált,* ha a komplementuma a csomó Seifert-felületeinek egy S^1-családja.

Csak a triviális csomónak 0 a génusza. Egy tetszőleges Seifert-felület génusza felső becslést ad $g(K)$-ra, azonban általában nehéz eldönteni, hogy a talált felület minimális génuszú-e. A csomó génuszára az első alsó becslést az Alexander-polinom szolgáltatta, mely polinom segítségével a fibráltságra is adható szükséges feltétel (lásd a 2.8. és a 2.9 tételeket).

A 2.2. tétel invariánsok definiálására is alkalmas: ha minden csomódiagramhoz definiálunk egy struktúrát, amely nem változik a Reidemeister-lépések során, akkor egy csomóinvariánst kapunk. Az Alexander-polinom egy szimmetrikus $\mathbb{Z}[t^{\frac{1}{2}}, t^{-\frac{1}{2}}]$-polinom, melyet a Kauffman-állapotok segítségével lehet kiszámítani [6]. Egy K

irányított csomó V vetülete egy immertált görbe $\mathbb{R}^2$-ben, mely tartományokra osztja a síkot. Jelölje $\mathrm{cr}\,(V)$ a vetület metszéspontjainak halmazát, $D(V)$ pedig a vetület tartományainak halmazát. Az Euler-féle poliédertétel szerint: $|D(V)| = |\mathrm{cr}\,(V)| + 2$. Rögzítsünk egy e élet a vetületen, és jelölje $D(V,e)$ az e-től diszjunkt tartományok halmazát, ezekre már $|D(V,e)| = |\mathrm{cr}\,(V)|$.



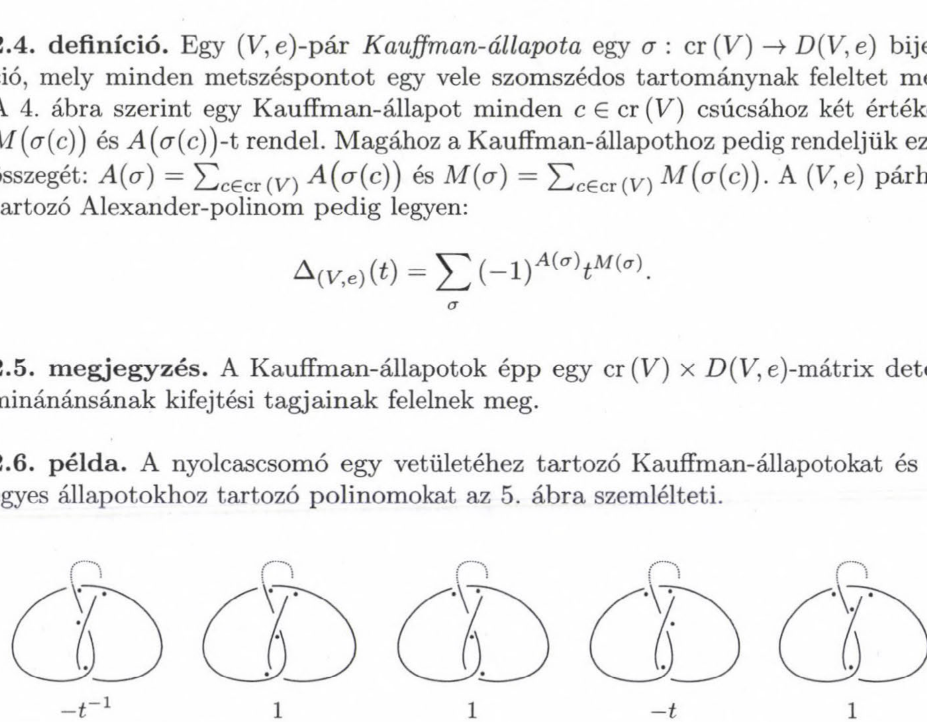
4. ábra. A csúcsokban a Kauffman-állapotokhoz rendelt értékek

2.4. definíció. Egy (V,e)-pár *Kauffman-állapota* egy $\sigma : \mathrm{cr}\,(V) \to D(V,e)$ bijekció, mely minden metszéspontot egy vele szomszédos tartománynak feleltet meg. A 4. ábra szerint egy Kauffman-állapot minden $c \in \mathrm{cr}\,(V)$ csúcsához két értéket, $M(\sigma(c))$ és $A(\sigma(c))$-t rendel. Magához a Kauffman-állapothoz pedig rendeljük ezek összegét: $A(\sigma) = \sum_{c \in \mathrm{cr}\,(V)} A(\sigma(c))$ és $M(\sigma) = \sum_{c \in \mathrm{cr}\,(V)} M(\sigma(c))$. A (V,e) párhoz tartozó Alexander-polinom pedig legyen:

$$\Delta_{(V,e)}(t) = \sum_{\sigma} (-1)^{A(\sigma)} t^{M(\sigma)}.$$

2.5. megjegyzés. A Kauffman-állapotok épp egy $\mathrm{cr}\,(V) \times D(V,e)$-mátrix determinánánsának kifejtési tagjainak felelnek meg.

2.6. példa. A nyolcascsomó egy vetületéhez tartozó Kauffman-állapotokat és az egyes állapotokhoz tartozó polinomokat az 5. ábra szemlélteti.

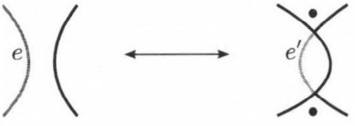


5. ábra. A nyolcascsomó Kauffman-állapotai. A kijelölt él szaggatott vonallal, a metszéspontokhoz tartozó tartományok pedig a tartományok sarkába helyezett pontokkal vannak jelölve. Így ehhez a vetülethez (és élhez tartozó) Alexander-polinom: $-t^{-1} + 3 - t$

Az Alexander-polinom független a vetület és a rajta lévő él választásától:

2.7. tétel. [6] *Ha (V,e) és (V',e') párok izotóp csomókhoz tartoznak, akkor $\Delta_{(V,e)}(t) = \Delta_{(V',e')}(t)$. Egy K csomó szimmetrializált* Alexander-polinomja *$\Delta_K(t) = \Delta_{(V,e)}(t)$, ahol V a csomó tetszőleges vetülete, e pedig a vetület tetszőleges éle.*

Bizonyításvázlat. A bizonyítás legnehezebb része, melyet itt nem is részletezünk, annak belátása, hogy rögzített V esetén a polinom független az e él választásától. Az első Reidemeister-lépés során a polinom nem változik, hiszen az újonnan kialakult tartomány csak az új csúcshoz tartozhat, és így megint kapunk egy egy-egy értelmű megfeleltetést a régi és új Kauffman-állapotok között. A második Reidemeister-lépésnél a megfeleltetést a 6. ábra jobb oldala adja. És ugyanígy, bár kicsit hosszabban jön ki a harmadik Reidemeister-lépéstől való függetlenség is, amit most szintén nem részletezünk. (A bizonyítás befejezése jó feladat az olvasónak.) ■



6. ábra. Megfeleltetés a Kauffman-állapotok között R2 lépés során (a többi csúcsnál a Kauffman-állapotok megegyeznek)

Ha egy vetületet a sík másik oldaláról nézünk, akkor $t^{\frac{1}{2}}$ és $t^{-\frac{1}{2}}$ szerepe felcserélődik, azaz $\Delta_K(t)$ szimmetrikus ($\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$). Tehát az Alexander-polinom felírható

$$\Delta_K(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\left(t^{\frac{i}{2}} + t^{-\frac{i}{2}}\right) \qquad (a_n \neq 0)$$

alakban. Az Alexander-polinom segítségével tudunk alsó becslést adni a csomó génuszára:

2.8. tétel [30]. $g(K) \geq n$. ■

A fibráltsághoz egy szükséges feltétel:

2.9. tétel. *Egy K fibrált csomó Alexander-polinomjára $n = g(K)$, és $a_n = \pm 1$.* ■

A 2.8. tétel segítségével több csomó, mint például a nyolcascsomó génusza is kiszámítható ($= 1$). Azonban ez a becslés sokszor nem egyenlőséggel teljesül. Sok nemtriviális csomónak például 1 az Alexander-polinomja [26].

3. Alapfogalmak

Ebben a fejezetben a továbbiakban használt alapvető fogalmakat definiáljuk és a jelöléseket rögzítjük, az algebrai topológiában jártas olvasó nyugodtan átugorhatja ezt a fejezetet.

3.1. Topológia alapfogalmak. Egy sokaság lokálisan euklideszi, azaz:

3.1. definíció. Az M T_2 és M_2 topológikus tér n *dimenziós (peremes) sokaság,* ha lefedhető $\{(U_i, \phi_i)\}$ *térképekkel,* ahol U_i nyílt halmaz és ϕ_i homomorfizmus U_i és $[0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$ egy nyílt részhalmaza között. A sokaság ∂M *pereme* a $\phi_i^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ ősképek uniója.

3.2. definíció. Az M sokaság *differenciálható* vagy *sima,* ha $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ esetén a $\phi_i^{-1} \circ \phi_j$ leképezés tetszőlegesen sokszor differenciálható (ahol értelmes).

Egy sokaság térképekkel való megadása nehézkes, valamivel kompaktabb megadás lehetséges egy háromszögelés segítségével.

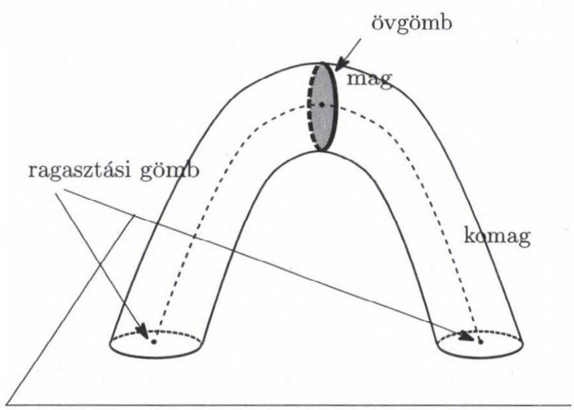
3.3. definíció. A $\{v_0, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^N$ affinfüggetlen pontok konvex burka a $[v_0, \ldots, v_n]$ n dimenziós *szimplex.* A $\{v_0, \ldots, v_n\}$ halmaz részhalmazai által kifeszített szimplexek a $[v_0, \ldots, v_n]$ szimplex *lapjai.* Egy *szimpliciális komplexus* $\mathbb{R}^N$-ben szimplexek egy olyan uniója, melyre bármely két szimplex metszete mindkettőnek lapja. Egy M topológikus tér *háromszögelése* egy szimpliciális komplexussal való homeomorfizmus megadása. Az i dimenziós szimplexek $\mathrm{sk}_i(M)$ uniója a felbontás *i-váza.*

Ugyan nem minden sima sokaság háromszögelhető [7], de a 3 dimenziós sokaságok igen:

3.4. tétel [11]. *Minden 3 dimenziós sokaság háromszögelhető.*

A sokaság egy másik féle darabolása a sokaság fogantyúfelbontása [3, 4. fejezet], [32].

3.5. definíció. A $D^k \times D^{n-k}$ (természetesen D^n-nel homeomorf) szorzatot *n dimenziós k-fogantyúnak* nevezzük. $D^k \times \{0\}$ a fogantyú *magja,* $\{0\} \times D^{n-k}$ a fogantyú *komagja.* A komag $\partial D^k \times \{0\}$ határa a fogantyú *ragasztási gömbje,* a mag $\{0\} \times \partial D^{n-k}$ határa pedig a fogantyú *övgömbje* (lásd 7. ábra).



7. ábra. 3 dimenziós 1-fogantyú

Az M n dimenziós sokasághoz egy n dimenziós k-fogantyú ragasztásával a ragasztási gömbje mentén egy új $M \cup_{\partial D^k \times \{0\}} D^k \times D^{n-k}$ sokaságot képezhetünk (10. ábra). (A fogantyúragasztás eredménye nem sima, de standard módon simítható.)

3.6. definíció. Legyen M peremes sokaság $\partial M = \partial_- M \coprod \partial_+ M$ peremmel. A $\partial_- M \times I$-ből $\partial_- M \times \{1\}$ menti ismételt fogantyúragasztással képzett M-mel diffeomorf sokaság az $(M, \partial_- M)$ *relatív fogantyúfelbontása.*

Nem nehéz belátni, pl. Morse-elmélet segítségével, hogy:

3.7. állítás [3, 4. fejezet]. *Minden kompakt sima sokaságnak van fogantyúfelbontása.*

3.2. Algebrai alapfogalmak.

Mint azt megjegyeztük, az Alexander-polinomot egy mátrix determinánsaként is lehet definiálni. Annak ellenére, hogy a mátrix nem marad változatlan a Reidemeister-lépések során, a determinánsa mégis invariáns lesz. Hasonló ötlet rejlik a lánckomplexusok homológiái mögött is. Sok topológiai invariáns definiálható homológiákkal. Ugyan maguk a lánckomplexusok általában nem, de a homológiájuk invariáns marad az ekvivalencia-lépések során.

3.8. definíció. Legyen $C = \oplus C_i$ egy gradált modulus, és $\partial = \oplus \partial_i : C \to C$ egy homomorfizmus, amely eggyel csökkenti a gradálást, azaz $\partial_i : C_i \to C_{i-1}$. Egy *lánckomplexus* egy olyan (C, ∂) pár, melyre $\partial^2 = 0$.

A C modulust a fokszámok szerint külön szedve egy lánckomplexus tehát modulusok, és köztük menő homomorfizmusok egy sorozata:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{i+2}} C_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \cdots,$$

melyre $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$. Ez a feltétel ekvivalens az $\operatorname{im} \partial_{i+1} \subseteq \ker \partial_i \subseteq C_i$ feltétellel, és így definiálható egy lánckomplexus homológiája:

3.9. definíció. A (C, ∂) lánckomplexus *homológiája* a $H_*(C, \partial) = \ker \partial / \operatorname{im} \partial$ gradált modulus, melynek i-edik tagja:

$$H_i = H_i\big((C, \partial)\big) = \ker \partial_i / \operatorname{im} \partial_{i+1}.$$

Egy lánckomplexus *egzakt,* ha a homológiája 0, azaz ha $\operatorname{im} \partial_{i+1} = \ker \partial_i$.

3.10. definíció. Legyen k az R (nullosztómentes) gyűrű hányadosteste. Egy M R-modulus $\operatorname{rk}(M)$ *rangja* az $M \otimes k$ vektortér dimenziója. (Ez a fogalom vektorterekre a dimenzió, $\mathbb{Z}$-modulusokra, azaz Abel-csoportokra pedig a szabadrész dimenziója.) Egy $C = \oplus C_i$ gradált modulus *Euler-karakterisztikája* $\chi(C) = \sum (-1)^i \operatorname{rk}(C_i)$.

A

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \ker \partial_i & \to & C_i & \to \operatorname{im} \partial_i \to 0 & & \text{és a} \\ 0 \to & \operatorname{im} \partial_{i+1} & \to \ker \partial_i \to & H_i & \to 0 & & \end{array}$$

rövid egzakt sorok szerint a rangokra fennáll:

$$\operatorname{rk}(C_i) = \operatorname{rk}(\ker \partial_i) + \operatorname{rk}(\operatorname{im} \partial_i)$$

$$\operatorname{rk}(\ker \partial_i) = \operatorname{rk}(\operatorname{im} \partial_{i+1}) + \operatorname{rk}(H_i).$$

Ebből $\chi(C) = \sum(-1)^i \operatorname{rk}(C_i) = \sum(-1)^i\big(\operatorname{rk}(\ker \partial_i) + \operatorname{rk}(\operatorname{im} \partial_i)\big)$. A $\operatorname{rk}(\operatorname{im} \partial_i)$-ket máshogy csoportosítva:

$$\sum(-1)^i\big(\operatorname{rk}(\ker \partial_i) - \operatorname{rk}(\operatorname{im} \partial_{i+1})\big) = \sum(-1)^i \operatorname{rk}(H_i) = \chi(H),$$

azaz egy lánckomplexus és a homológiájának az Euler-karakterisztikája megegyezik.

3.11. definíció. Az $f : (C, \partial^C) \to (D, \partial^D)$ lánckomplexusok közötti gradálást tartó leképezés *láncleképezés,* ha $f \circ \partial^D = \partial^C \circ f$, azaz, ha a

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial^C_{i+2}"] & C_{i+1} \arrow[r, "\partial^C_{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+1}"] & C_i \arrow[r, "\partial^C_i"] \arrow[d, "f_i"] & C_{i-1} \arrow[r, "\partial^C_{i-1}"] \arrow[d, "f_{i-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial^D_{i+2}"] & D_{i+1} \arrow[r, "\partial^D_{i+1}"] & D_i \arrow[r, "\partial^D_i"] & D_{i-1} \arrow[r, "\partial^D_{i-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív. Egy láncleképezés természetesen indukál egy

$$f_* : H_*(C, \partial^C) \to H_*(D, \partial^D)$$

leképezést a homológiákon.

Láncleképezés pl. az identitás: $\mathrm{id}_C : (C, \partial^C) \to (C, \partial^C)$. Ahhoz, hogy két láncleképezés ugyanazt a leképezést indukálja a homológiákon elégséges:

3.12. definíció. Az $f, g : (C, \partial^C) \to (D, \partial^D)$ láncleképezések *lánchomotópok,* ha létezik egy $h : (C, \partial^C) \to (D, \partial^D)$ leképezést, mely 1-gyel növeli a gradálást, és melyre: $(f - g) = h \circ \partial^C \pm \partial^D \circ h$. Azaz a

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial^C_{i+2}"] & C_{i+1} \arrow[r, "\partial^C_{i+1}"] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[dl, "h_{i+1}"'] & C_i \arrow[r, "\partial^C_i"] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f_i"] \arrow[dl, "h_i"'] & C_{i-1} \arrow[r, "\partial^C_{i-1}"] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[dl] & \cdots \arrow[dl, "h_{i-2}"'] \\
\cdots \arrow[r, "\partial^D_{i+2}"] & D_{i+1} \arrow[r, "\partial^D_{i+1}"] & D_i \arrow[r, "\partial^D_i"] & D_{i-1} \arrow[r, "\partial^D_{i-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

diagramra $f_i - g_i = h_{i-1} \circ \partial^C_i \pm \partial^D_i \circ h_i$.

Egy $c \in \ker \partial^C$ elemre

$$(f-g)(c) = h \circ \partial^C(c) \pm \partial^D \circ h(c) = 0 \pm \partial^D \circ h(c) \in \operatorname{im} \partial^D,$$

azaz lánchomotóp leképezések ugyanazt a leképezést indukálják a homológiákon.

3.13. definíció. A (C, ∂^C) és a (D, ∂^D) lánckomplexusok *lánchomotóp-ekvivalensek,* ha léteznek $f : (C, \partial^C) \to (D, \partial^D)$ és $g : (D, \partial^D) \to (C, \partial^C)$ láncleképezések, melyekre $f \circ g$ lánchomotóp id_D-vel és $g \circ f$ lánchomotóp id_C-vel.

A természetesség miatt $(\mathrm{id}_D)_* = f_* \circ g_*$ és $(\mathrm{id}_C)_* = g_* \circ f_*$, azaz az

$$f_* : H_*(C, \partial^C) \to H_*(D, \partial^D)$$

és a

$$g_* : H_*(D, \partial^D) \to H_*(C, \partial^C)$$

leképezések egymás inverzei, így $H_*(C, \partial^C) \cong H_*(D, \partial^D)$:

3.14. tétel. *Lánchomotóp-ekvivalens lánckomplexusok homológiája izomorf.* ■

3.3. Sokaságok homológiája. A topológiában leggyakrabban előforduló homológiaelmélet legegyszerűbb változata a szimpliciális homológia. Ez csak háromszögelt terekre definiált, de általánosítható tetszőleges topologikus térre [4]. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az X topologikus tér háromszögelhető, és rögzítsük is egy háromszögelését. Legyen C_i az i dimenziós szimplexek által generált $\mathbb{Z}$-modulus. A határleképezés a generátorokon:

$$\partial[v_0, \dots, v_n] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n],$$

ahol $[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]$ a v_i csúcs kihagyásával feszített hiperlap. Azaz a határleképezés a szimplex határában lévő maximális lapok egy előjellel vett összege. Így valóban egy lánckomplexust kapunk:

3.15. állítás. $\partial^2 = 0$.

Bizonyítás.

$$\partial^2[v_0, \dots, v_n] = \partial\Big(\sum_i (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]\Big) =$$

$$= \sum_{i<j} (-1)^{i+(j-1)} [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_n] +$$

$$+ \sum_{j<i} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n] = 0. \ ■$$

A homológia független a háromszögeléstől:

3.16. tétel/definíció. *A fent definiált lánckomplexus homológiája az X tér topologikus invariánsa, ez az X tér $H_i(M)$ szimpliciális homológiája.* ■

4. 3-sokaságok megadása

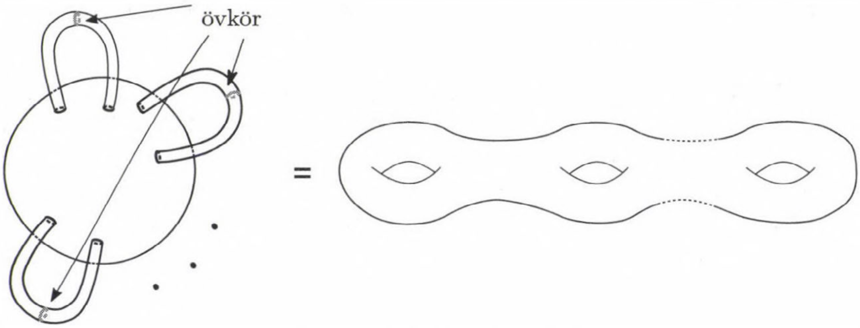
A csomóinvariánsoknál bevált stratégiát követve 3-sokaságok olyan leírását keressük, melyeknél értjük, hogy két megadás mikor adja ugyanazt a 3-sokaságot. Ilyen megadás a 3-sokaság Heegaard-felbontása, illetve Heegaard-diagramja.

4.1. Heegaard-felbontások.

A 3-sokaságok építőkövei a tömör g-fogantyúk:

4.1. definíció. Egy D^3 0-fogantyúra g darab 3 dimenziós 1-fogantyút ragasztva egy U *tömör g-fogantyút* kapunk, lásd a 8. ábrát.

Egy tömör g-fogantyú egy peremes 3-sokaság, melynek pereme egy Σ g génuszú felület. Tetszőleges összefüggő $G(V, E)$ gráf környezete $\mathbb{R}^3$-ban tömör $g(= |E| - |V| + 1)$-fogantyú.



8. ábra. Tömör g-fogantyú

4.2. definíció. Az U_1 és U_2 tömör g-fogantyúk peremének összeragasztásával egy Y zárt 3-sokaságot kapunk. Az $Y = U_1 \cup_\Sigma U_2$ felbontás az Y *Heegaard-felbontása,* g a Heegaard-felbontás *génusza,* $\Sigma = \partial U_1 = \partial U_2$ a Heegaard-felbontáshoz tartozó *Heegaard-felület,* a határokat azonosító $\phi : \partial U_1 = \Sigma \to \Sigma = \partial U_2$ leképezés pedig a Heegaard-felbontás *ragasztóleképezése.*

4.3. példa . A legegyszerűbb Heegaard-felbontása S^3-nak van:

$$S^3 = D^3 \cup_{\mathrm{id}} D^3$$

Sőt, mivel $\partial D^3 = S^2$ minden irányítástartó diffeomorfizmusa izotóp az identitással, ezért minden 0 génuszú Heegaard-felbontás S^3-at adja. S^3-nak van 1 génuszú Heegaard-felbontása is:

4.4. példa. A 3-gömb $\mathbb{C}^2$ egy részhalmaza: $S^3 = \Big\{\big|(z_0, z_1)\big| = 1\Big\} \subset \mathbb{C}^2$. Így két részre bontható: $S^3 = U_1 \cup U_2$, ahol

$$U_1 = \big\{(z_0, z_1) \in S^3 : |z_0| \leq |z_1|\big\}$$

$$U_2 = \big\{(z_0, z_1) \in S^3 : |z_1| \leq |z_0|\big\}.$$

U_0 és U_1 tömör tóruszok közös része (a Heegaard-felület) egy tórusz:

$$T^2 = U_1 \cap U_2 = \left\{ (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 : |z_0| = |z_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

A ragasztóleképezés megadásához U_0-at és U_1-et is azonosítanunk kell egy standard tömör 1-fogantyúval, pl.:

$$U = S^1 \times D^2 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : 1, |w| \leq 1 = |z|\}.$$

Az azonosítóleképezések:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1 : & U & \to & U_1 \\ & (z,w) & \mapsto & \left(\frac{1}{\sqrt{2}} w, \frac{1}{\sqrt{2}} z\right) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \varphi_2 : & U & \to & U_2 \\ & (z,w) & \mapsto & \left(\frac{1}{\sqrt{2}} z, \frac{1}{\sqrt{2}} w\right) \end{array}$$

A ragasztás ekkor:

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_2^{-1}|_{\partial U_2} \circ \varphi_1|_{\partial U} : \partial U &\to \partial U \\ (z, w) &\mapsto (w, z). \end{aligned}$$

Legyen K a triviális csomó $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$-ban; ekkor az $U_1 = N(K)$ és $U_2 = S^3 - \mathring{N}(K)$ szintén ezt a Heegaard-felbontást adja.

Azonban nem csak S^3-nak létezik 1 génuszú Heegaard-felbontása.

4.5. definíció. Az $L(p,q)$ *lencsetér* az $S^3 = \{|(z_0, z_1)| = 1\} \subset \mathbb{C}^2$ gömb

$$(z_0, z_1) \mapsto \left(e^{\frac{2\pi i}{p}} z_0, e^{q\frac{2\pi i}{p}} z_1\right)$$

$\mathbb{Z}_p$-hatás szerinti faktora, azaz:

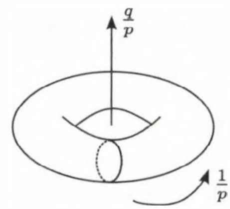
$$L(p,q) = \frac{S^3}{(z_0, z_1) \sim \left(e^{\frac{2\pi i}{p}} z_0, e^{q\frac{2\pi i}{p}} z_1\right)},$$

Ugyanez a hatás leírható S^3 1 génuszú Heegaard-felbontásának segítségével is: a hatás $\frac{1}{p} 2\pi$-vel forgatja az $U_1 = N(K)$ részt, és $\frac{q}{p} 2\pi$-vel az $U_2 = S^3 - \mathring{N}(K)$ részt (9. ábra).

4.6. példa. A fenti $\mathbb{Z}_p$-hatásra nézve a 4.3. példában az U_1 és U_2 fogantyúk invariánsak, a faktoraik tömör tóruszok, jelölje őket V_1 és V_2. Ezek a lencsetér egy Heegaard-felbontását adják:

$$L(p,q) = V_1 \cup V_2.$$

Egy sokaság háromszögelése segítségével meg is adható egy Heegaard-felbontás.



9. ábra. A $\mathbb{Z}_p$ hatás $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$-on

4.7. állítás [31]. *Minden Y zárt irányított 3-sokaságnak van Heegaard-felbontása, azaz előáll $Y = U_1 \cup_\Sigma U_2$ alakban.*

Bizonyítás. Rögzítsük Y egy háromszögelését (ilyen a 3.4. tétel szerint van), és legyen U_1 a trianguláció 1-vázának egy környezete, a komplementum $U_2 = Y - \mathring{U}_1$ a duális felbontás 1-vázának környezetével diffeomorf, így mindkettő tömör fogantyú. Mivel $\partial U_1 = \partial U_2$, így a génuszuk megegyezik, azaz U_1 és U_2 tömör g-fogantyúk azonos g-re. Így U_1 és U_2 valóban Y egy Heegaard-felbontását adják. ∎

Ha egy sokaságnak van $Y = U_1 \cup U_2$ g génuszú Heegaard-felbontása, akkor van $g+1$ génuszú is. Legyen ugyanis c egy szakasz a Σ felületen, és egy izotópiával toljuk ki a szakasz belsejét U_1 belsejébe. A szakaszt még mindig c-vel jelölve, kapunk egy $(c, \partial c) \hookrightarrow (U_1, \partial U_1)$ szakaszt U_1-ben, és jelölje $N(c)$ a c ív egy kis nyílt környezetét U_1-ben. Ekkor az

$$U_1' = U_1 - \mathring{N}(c)$$
$$U_2' = U_2 \cup N(c)$$

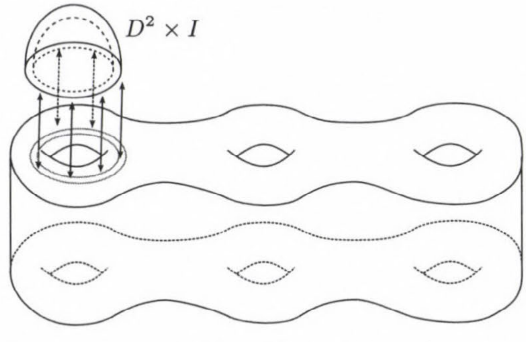
$(g+1)$-fogantyúk az Y egy új $Y = U_1' \cup U_2'$ Heegaard-felbontását adják, melyet az $Y = U_1 \cup U_2$ Heegaard-felbontás *stabilizáltjának* nevezünk.

Egy Heegaard-felbontás megadásához le kéne tudnunk írni a tömör fogantyúk határai között menő ragasztóleképezéseket. Ennek megkönnyítésére a Heegaard-felbontásokat Heegaard-diagramokkal adjuk meg.

4.2. Heegaard-diagramok. A ragasztóleképezés megadása helyett egy g génuszú felületből kiindulva görbék segítségével adjuk meg, hogy hogyan ragasszuk a felületre a két tömör g-fogantyút. Az U tömör g-fogantyú felületén a 3 dimenziós 1-fogantyúk övkörei g-görbét adnak meg, melyekre:

1. Minden övkör körlapot határol U-ban.
2. Az övkörök diszjunktak, és lineárisan függetlenek a felület homológiájában.

Fordítva, a Σ_g g génuszú felületen adott bármely homologikusan független görbe g-es leír egy tömör g-fogantyút a következőképpen. Ragasszunk 3 dimenziós 2-fogantyúkat a $\Sigma_g \times \{1\} \subset \Sigma_g \times I$ felülethez a megadott görbék mentén. Mint a 10. ábrán látható, a ragasztást úgy kell végrehajtani, hogy a görbe egy környezetét Σ_g-n azonosítjuk $\partial D \times I$-vel. Az összes körlap ragasztása után egy 3-



10. ábra. Körlap ragasztása

sokaságot kapunk $\Sigma_g \cup S^2$ peremmel. Az S^2 komponenst egy D^3 golyóval (azaz egy 3-fogantyúval) beragasztva egy tömör g-fogantyút kapunk. A fenti receptet követve tehát egy Σ felületen adott két homológikusan független görbe g-esből egy teljes 3-sokaság felépíthető.

4.8. definíció. A $\left(\Sigma_g, \boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_g\}, \boldsymbol{\beta} = \{\beta_1, \dots, \beta_g\}\right)$ hármas *Heegaard-diagram,* ha

1. $\alpha_1, \dots, \alpha_g \subset \Sigma_g$ diszjunkt, beágyazott, $H_1(\Sigma_g)$-ben lineárisan független görbék;
2. $\beta_1, \dots, \beta_g \subset \Sigma_g$ diszjunkt, beágyazott, $H_1(\Sigma_g)$-ben lineárisan független görbék.

A $(\Sigma_g, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ Heegaard-diagram Y-t írja le, ha az $Y = U_1 \cup_{\Sigma_g} U_2$ Heegaard-felbontásra az α-görbék körlapokat határolnak U_1-ben, a β-görbék pedig körlapokat határolnak U_2-ben.

A $H_1(\Sigma_g)$-ben való lineáris függetlenség könnyen ellenőrizhető:

4.9. megjegyzés. Az $\boldsymbol{\alpha}$ diszjunkt beágyazott görbe g-es lineárisan független $H_1(\Sigma_g)$-ben, pontosan akkor, ha $\Sigma_g - \cup\boldsymbol{\alpha}$ összefüggő.

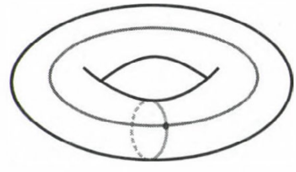
A Mayer–Vietoris-sor szerint egy 3-sokaság homológiája kiszámítható a hozzá tartozó Heegaard-diagram segítségével:

4.10. állítás. *Ha $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ az Y sokaság Heegaard-diagramja, akkor:*

$$H_1(Y) = \frac{H_1(\Sigma)}{\langle\boldsymbol{\alpha}\rangle \oplus \langle\boldsymbol{\beta}\rangle}. \qquad \blacksquare$$

A továbbiakban néhány példát adunk Heegaard-diagramokra, melyeket az elmélet további építgetése során majd szemléltetéshez használunk.

4.11. példa. Az $S^3 = D^3 \cup_{S^2} D^3$ Heegaard-felbontáshoz tartozó Heegaard-diagram nem tartalmaz görbéket: $(S^2, \emptyset, \emptyset)$.



11. ábra. S^3 Heegaard-diagramja (a meridionális görbe α_0, a longitudiális β_0)

4.12. példa. S^3 1 génuszú Heegaard-felbontásához tartozó Heegaard-diagram a 11. ábrán látható (T^2, α_0, β_0).

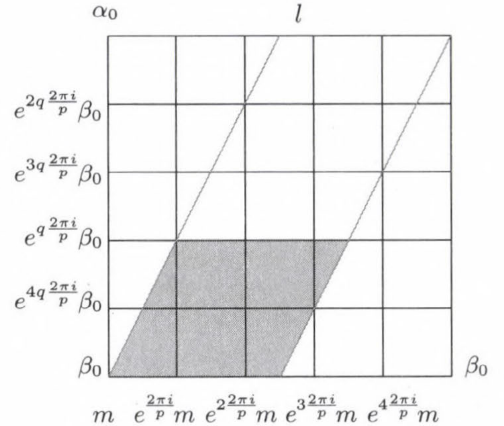
4.13. példa. A (T^2, α, α') párhuzamos görbéket tartalmazó Heegaard-diagram $S^1 \times S^2$-t adja meg. Ugyanis az α-görbére transzverzális longitudinális görbe mentén a ragasztott körlapok egy-egy S^2 gömbbé állnak össze, így S^2-k egy S^1 családját adva.

4.14. példa. A 4.6. példabeli $L(p, q) = V_1 \cup V_2$ felbontáshoz tartozó Heegaard-diagram megadásához először rögzítenünk kell a $\frac{T^2}{\mathbb{Z}_p}$ faktortórusz egy azonosítását a T^2 tórusszal. Ehhez meg kell találnunk a hatás egy elemi tartományát (azaz egy olyan tartományt, mely a hatás minden p-es ekvivalenciaosztályából pontosan egy elemet tartalmaz). A 4.12. példabeli α_0, β_0 koordinátákkal a T^2 tórusz görbéi a meredekségükkel írhatóak le, α_0 meredeksége pl. 0, β_0-é pedig ∞. Egy q meredekségű l görbét (lásd a 12. ábra bal oldali ábráját a $p = 5$, $q = 2$ esetre) a $\mathbb{Z}_p$ hatás fixen hagy. Az α_0, $e^{q\frac{2\pi i}{p}}\alpha_0$ és l görbék által határolt tartomány elemi. A $\frac{T^2}{\mathbb{Z}_p}$ faktortórusz az elemi tartományból a vízszintes határok és a q-meredekségű határok egymással való azonosításával kapható. A 4.12. példa α_0 és β_0 görbéi, és az általuk határolt diszkek orbitjai p-p darab diszjunkt görbét és diszket ad, így a faktorizálás után az $[\alpha_0]$, $[\beta_0]$ ekvivalenciaosztályok az $L(p, q) = V_1 \cup V_2$ Heegaard-felbontást leíró görbéket adják a $\frac{T^2}{\mathbb{Z}_p}$ Heegaard-felületen. Az új koordinátákban felírva $[\alpha_0]$ 0 meredekségű, $[\beta_0]$ pedig l-et p-szer, α_0-t pedig q-szor metszi, azaz $\frac{q}{p}$ meredekségű. A 12. ábra jobb oldali ábrája az $L(p, q)$ lencsetér Heegaard-diagramját ábrázolja a $p = 5$, $q = 2$ esetben.

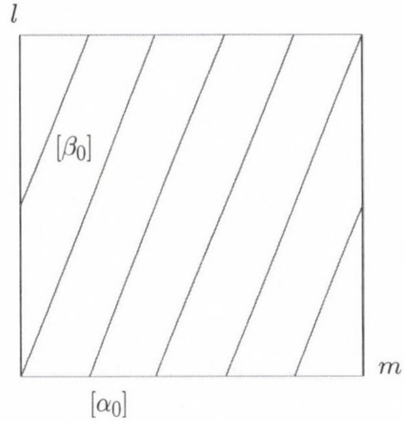
4.15. példa. A 13. ábrán szemléltetett Heegaard-diagram leírásához képzeljük S^2-t mint $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, és azonosítsuk az ábrán lévő bal oldali két körlapot tükrözéssel, és hasonlóan azonosítsuk a jobb oldali két körlapot is egymással. Így egy 2 génuszú felületet kapunk, melyen a görbék egy Heegaard-diagramot adnak meg. (Vegyük észre, hogy az azonosítás után az α_1-et, α_2-t és β_2-t ábrázoló görbék valóban zárt görbékké ragadnak össze.)

4.16. definíció. Jelölje Y_n a fenti Heegaard-diagram által leírt 3-sokaságot, ahol n azt jelenti, hogy a β_2 görbe hányszor megy körbe a jobb oldali kör körül ($n < 0$ esetén a másik irányba megyünk körbe $-n$-szer).

4.3. Heegaard-lépések. A Heegaard-diagram bizonyos változtatásai nem változtatják meg a definiált 3-sokaságot.

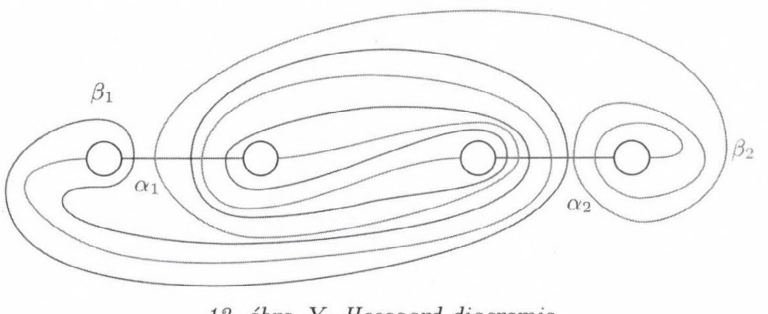


A hatás elemi tartománya



Az $L(5,2)$ lencsetér Heegaard diagramja

12. ábra. Az $L(5,2)$ lencsetér Heegaard-diagramja (a négyzetek alja-teteje, és jobb-, illetve bal oldala mindkét ábrán azonosítva van)



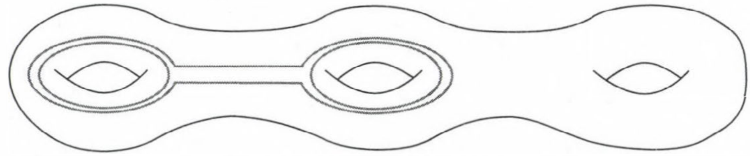
13. ábra. Y_2 Heegaard-diagramja

4.17. definíció. A Heegaard-diagram *izotópiája* az α- és/vagy β-görbék elmozgatása úgy, hogy a görbék az izotópia során végig beágyazottak és diszjunktak maradnak.

Az izotópia nyilván nem változtatja meg a definiált 3-sokaságot.

4.18. definíció. Az α_1 görbe *átcsúsztatása* α_2 felett egy α_1' görbét ad, mely az α_1 összefüggő összege α_2 egy tőle diszjunkt eltoltjával. Egy $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ Heegaard-diagramban kicserélhetjük α_1-et α_1'-re, ha az összefüggő összeget a többi α-görbétől diszjunktan vettük. Ezt a műveletet *fogantyúcsúsztatásnak* nevezzük.

Az α_1' görbe a $H_1(\Sigma)$ homológiában $\pm\alpha_1 \pm \alpha_2$-t reprezentálja, azaz az új rendszer is lineárisan független. Tehát a kapott hármas egy Heegaard-diagram. Mivel az új görbe által határolt körlap a régi körlapok határmenti összege, így ez a Heegaard-diagram ugyanazt a 3-sokaságot írja le. A fogantyúcsúsztatás inverze is fogantyúcsúsztatás: α_1' egy nadrágot határol α_1-gyel és α_2-vel közösen (lásd 14. ábra). Nem



14. ábra. Fogantyúcsúsztatás

nehéz ellenőrizni, hogy a Heegaard-diagramok összefüggő összege a sokaságok összefüggő összegét adja. Speciálisan egy Heegaard-diagramot S^3 tetszőleges Heegaard-diagramjával összefüggő összegezve a leírt 3-sokaság nem változik.

4.19. definíció. Egy Heegaard-diagram összefüggő összege S^3 4.3. példabeli (T^2, α_0, β_0) Heegaard-diagramjával a Heegaard-diagram *stabilizációja*. A fordított műveletet *destabilizációnak* nevezzük.

A Heegaard-felbontások szintjén ez a stabilizáció megfelel a 4.1. fejezetben leírt stabilizációnak. A fent leírt lépések összefoglaló neve *Heegaard-lépés.*

4.20. tétel [19]. *Ha* $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ *és* $(\Sigma', \boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}')$ *az* Y *3-sokaság Heegaard-diagramjai, akkor Heegaard-lépések véges sorozatával egymásba vihetők.* ∎

5. A szimmetrikus szorzat

Ebben a fejezetben definiálunk egy adott $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ Heegaard-diagramhoz tartozó $\widehat{CF}(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ lánckomplexust. Maga $\widehat{CF}$ függ a Heegaard-diagramtól, de $\widehat{HF}$ homológiája már a 3-sokaság invariánsa lesz. Az invariancia bizonyítása bonyolult, később is csak érzékeltetni fogjuk.

5.1. definíció. Egy rendezetlen $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_g\}$ pont g-est *metszéspontnak* vagy *generátornak* nevezünk, ha $\{x_1, \ldots, x_g\} \subset \boldsymbol{\alpha} \cap \boldsymbol{\beta}$, és minden α-, illetve β-görbén pontosan egy x_i pont van. A lánckomplexus $\widehat{CF}$ alaphalmaza az $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_g\}$ metszéspontok által generált $\mathbb{Z}_2$ vektortér.

5.2. példa. Az S^3 gömb 4.12. példabeli Heegaard-diagramján 1 metszéspont van.

$L(p,q)$ 4.14. példabeli Heegaard-diagramján p darab metszéspont van.

Y_n Heegaard-diagramja 2 génuszú felületen van, azaz a metszéspontok az

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in (\alpha_1 \cap \beta_1) \times (\alpha_2 \cap \beta_2) \cup (\alpha_2 \cap \beta_1) \times (\alpha_1 \cap \beta_2)$$

pontpárok. Az $|\alpha_i \cap \beta_j|_{i,j=1}^2$ metszésmátrix

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & |n| + 2 \end{vmatrix}.$$

Így a metszéspontok száma $3\big(|n| + 2\big) + 2 \cdot 3 = 3 \cdot \big(|n| + 4\big)$.

A 4.11. és a 4.13. példában a Heegaard-diagramokon egyáltalán nincsen metszéspont. Ezekhez lánckomplexust sem szeretnénk rendelni. Ettől még az ilyen diagramok által definiált 3-sokaságoknak is fogunk tudni Heegaard-homológiát definiálni más Heegaard-diagramokon keresztül. Általában le fogjuk szűkíteni a vizsgált Heegaard-diagramok halmazát úgynevezett megengedett Heegaard-diagramokra, melyeket majd az 5.1. alfejezetben definiálunk. Amennyiben $b_1(Y)\big(=\mathrm{rk}\ H_1(Y)\big)=0$, akkor minden Heegaard-diagram automatikusan megengedett.

Mielőtt definiálni tudnánk a határleképezést, érdemes másképpen is interpretálni a lánckomplexus generátorait. Egy Σ felület d-edik szimmetrikus szorzata Σ rendezetlen pont d-eseiből áll.

5.3. definíció. A $\Sigma^{\times d}$ térhatványon a koordináták cseréje S_d-hatást definiál (itt S_d a d elemen ható szimmetrikus csoport). A Σ felület $\mathrm{Sym}^d(\Sigma)$ *d-edik szimmetrikus szorzata* a $\Sigma^{\times d}$ térhatvány S_d szerinti faktortere. $\mathrm{Sym}^d(\Sigma)$ pontjai tehát Σ rendezetlen pont d-eseinek felelnek meg.

Ez a konstrukció persze tetszőleges térre működik. Ami a felületeket különlegessé teszi, az az, hogy annak ellenére, hogy az S_d-hatás nem szabad, egy felület szimmetrikus szorzata mégis sokaság lesz.

5.4. állítás. $\mathrm{Sym}^d(\Sigma)$ *komplex sokaság.*

Bizonyítás. Először a lokális állítást látjuk be. Egy $\{r_1,\ldots,r_d\}\in\mathrm{Sym}^d(\mathbb{C})$ rendezetlen pont d-es egyértelműen definiál egy 1 főegyütthatójú polinomot, mely gyökeinek halmaza épp $\{r_1,\ldots,r_d\}$:

$$(z-r_1)\cdots(z-r_n)=z^d+a_{d-1}+\cdots+a_1z+a_0.$$

Az algebra alaptétele szerint az $\{r_1,\ldots,r_d\}\mapsto(a_{d-1},\ldots,a_0)$ leképezés bijekció, mely ráadásul (a gyökök és együtthatók közötti összefüggés szerint) homeomorfizmus is. Így a $\mathbb{C}^d$-n adott komplex struktúra visszahúzottja indukál egy komplex struktúrát a $\mathrm{Sym}^d(\mathbb{C})$ szimmetrikus szorzaton. Általánosabban $\mathrm{Sym}^d(\Sigma)$ is koordinátázható. Egy $\mathbf{x}=\{x_1,\ldots,x_d\}\in\mathrm{Sym}^d(\Sigma)$ pont d-eshez vegyünk egy közös U elemi környezetet, ekkor az előbbiek alapján $\mathrm{Sym}^d(U)\subset\mathrm{Sym}^d(\Sigma)$ konform ekvivalens egy $\mathbb{C}^d$-beli nyílt halmazzal. ■

A szimmetrikus szorzat topológiájára a következők igazak:

5.5. tétel [9]. $\pi_1\big(\mathrm{Sym}^g(\Sigma)\big)\cong H_1\big(\mathrm{Sym}^g(\Sigma)\big)\cong H_1(\Sigma)$. ■

Így a 4.10. állítás szerint a 3-sokaság első homológiájára:

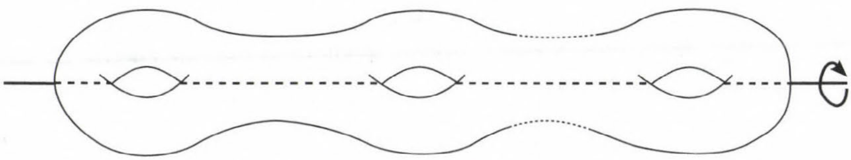
5.6. állítás [9].

$$H_1(Y)\cong\frac{H_1(\Sigma)}{\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_g\rangle\oplus\langle\beta_1,\ldots,\beta_g\rangle}\cong\frac{H_1\big(\mathrm{Sym}^g(\Sigma_g)\big)}{H_1(\mathbb{T}_\alpha)\oplus H_1(\mathbb{T}_\beta)}.$$

Továbbá

5.7. tétel [9]. *Ha $g > 2$, akkor* $\pi_2(\mathrm{Sym}^g(\Sigma)) \cong \mathbb{Z}$. ∎

A $\pi_2(\mathrm{Sym}^g(\Sigma))$-t generáló elem le is írható: A Σ felület 15. ábrán adott egyenes körüli 180°-os forgatását hiperelliptikus transzformációnak hívjuk, és τ-val jelöljük.



15. ábra. A hiperelliptikus transzformáció

A felület τ szerinti faktora egy gömb, mely az $S = \big\{\{x, \tau(x), x_0, \ldots, x_0\} : x \in \Sigma\big\} \subset \mathrm{Sym}^d(\Sigma)$ gömböt definiálja a szimmetrikus szorzatban. Az S által reprezentált homotópiaosztály generálja $\pi_2(\mathrm{Sym}^g(\Sigma))$-t.

Egy Heegaard-diagramhoz tartozó α- és β-görbék természetesen definiálnak egy-egy részsokaságot a $\mathrm{Sym}^d(\Sigma)$ szimmetrikus szorzatban. Mivel mind az α-, mind a β-görbék diszjunktak, így az $\alpha_1 \times \cdots \times \alpha_g \subset \Sigma^{\times g}$ és a $\beta_1 \times \cdots \times \beta_g \subset \Sigma^{\times g}$ tóruszokon szabad az S_g-hatás. A $\mathbb{T}_\alpha \subset \mathrm{Sym}^g(\Sigma)$ és $\mathbb{T}_\beta \subset \mathrm{Sym}^g(\Sigma)$ megfelelő faktorok szintén tóruszok. Amennyiben az α- és β-görbék transzverzálisan metszik egymást, a $\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ metszet is transzverzális lesz, és mivel ezek a tóruszok g dimenziós részsokaságai $\mathrm{Sym}^g(\Sigma)$-nak, így véges sok pontban metszik egymást. Így az 5.3. definíció újrafogalmazható:

5.8. definíció. A $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ Heegaard-diagramhoz tartozó lánckomplexus alaphalmaza:

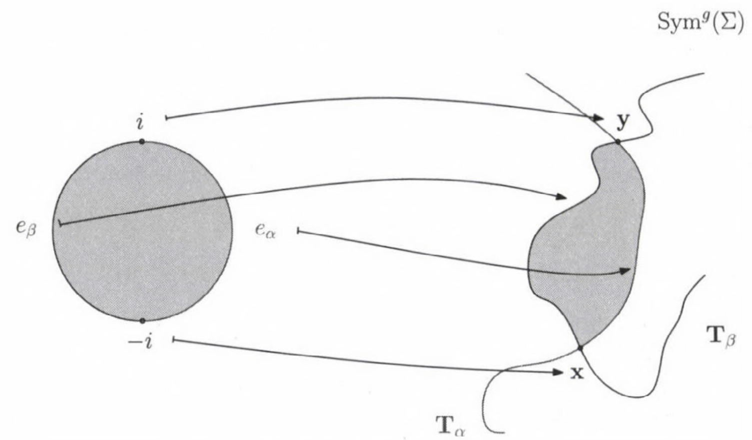
$$\widehat{CF}(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \langle \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta \rangle_{\mathbb{Z}_2},$$

azaz a $\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ metszéspontok által generált formális $\mathbb{Z}_2$ vektortér.

A határleképezés a metszéspontokat összekötő holomorf körlapok segítségével adható meg, a továbbiakban ezeket próbáljuk jobban megérteni.

5.1. Körlapok a szimmetrikus szorzatban. Legyen $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ a zárt körlap. Osszuk a határát két részre a következőképpen: $e_\alpha = \{z \in \partial\mathbb{D} : \mathrm{Re}\, z \geq 0\}$ és $e_\beta = \{z \in \partial\mathbb{D} : \mathrm{Re}\, z \leq 0\}$.

5.9. definíció. Az $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ metszéspontokat összekötő *Whitney-körlap* egy olyan folytonos $u : \mathbb{D} \to \mathrm{Sym}^g(\Sigma_g)$ leképezés, melyre: $u(-i) = \mathbf{x}$, $u(i) = \mathbf{y}$, $u(e_\alpha) \subset \mathbb{T}_\alpha$ és $u(e_\beta) \subset \mathbb{T}_\beta$. Az $\mathbf{x}$-et és $\mathbf{y}$-t összekötő Whitney-körlapok (Whitney-körlapokon keresztüli) homotópiaosztályait jelölje $\pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.



16. ábra. Whitney-körlap

A $\pi_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$ halmaz nem alkot csoportot, de Whitney-körlapok összefűzésével definiálható a

$$\pi_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \times \pi_2(\mathbf{y},\mathbf{v}) \to \pi_2(\mathbf{x},\mathbf{v})$$

szorzat, vagy egy belső ponthoz való gömb ragasztásával definiálható a

$$\pi_2\big(\mathrm{Sym}^g(\Sigma_g)\big)/\pi_1\big(\mathrm{Sym}^g(\Sigma_g)\big) * \pi_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \to \pi_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

leképezés. A Whitney-körlap létezésének egy egyszerű obstrukciója adható $H_1(Y)$-ban. Válasszunk egy $\mathbf{x}$-et $\mathbf{y}$-nal összekötő $a \subset \mathbb{T}_\alpha$ és egy $\mathbf{y}$-t $\mathbf{x}$-szel összekötő $b \subset \mathbb{T}_\beta$ utat. Ekkor az $a * b$ hurok egy elemet ad meg $H_1\big(\mathrm{Sym}^g(\Sigma)\big)$-ban, melyhez tartozó $\varepsilon(\mathbf{x},\mathbf{y})$ osztály $H_1(Y) \cong \frac{H_1(\mathrm{Sym}^g(\Sigma_g))}{H_1(\mathbb{T}_\alpha)\oplus H_1(\mathbb{T}_\beta)}$-ban már független az összekötő út választásától. Ez az obstrukció magán a felületen is számítható. Ugyanis az $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_g\}$ és $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_g\}$ pontokat összekötő $a \in \mathbb{T}_\alpha$ útra gondolhatunk úgy is, mint az $a_1, \dots, a_g$ utak halmazára $\cup\boldsymbol{\alpha}$-ban, mely határa $x_1 + \dots + x_g - y_1 - \dots - y_g$. Hasonlóan b azonosítható a $b_1, \dots, b_g$ úthalmazzal $y_1 + \dots + y_g - x_1 - \dots - x_g$ határral. Ekkor $a + b$ egy 1-ciklus Σ-n, és így egy elemet definiál $H_1(\Sigma)$-ban. Ennek képe $H_1(Y)$-ban $\varepsilon(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

A definícióból látszik, hogy ha $\varepsilon(\mathbf{x},\mathbf{y}) \neq 0$, akkor $\pi_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \emptyset$. Az előbbi észrevétel megfordítása is igaz (lásd 5.16. tétel). Ez az obstrukció additív:

$$\varepsilon(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \varepsilon(\mathbf{y},\mathbf{v}) = \varepsilon(\mathbf{x},\mathbf{v}).$$

Így ε egy ekvivalenciarelációt ad meg a metszéspontokon:

5.10. definíció. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{x}$ és az $\mathbf{y}$ metszéspontok ugyanazt a *Spin^c-struktúrát* határozzák meg, ha $\varepsilon(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$. Így a Spin^c-struktúrák halmaza affinan $H_1(Y)$.

A Spin^c-struktúrák általánosabban tetszőleges valós vektornyalábra definiálhatók, mint a struktúracsoport felemelése SO(n) egyetlen nemtriviális S^1-nyalábjára [3]. A Heegaard-diagramok metszéspontjainak természetes módon megfeleltethetünk Spin^c-struktúrákat [19].

5.11. példa. A lencseterek 4.14. példabeli Heegaard-diagramján lévő metszéspontok között az ε obstrukció nem nulla, így mind a p metszéspont különböző Spin^c-struktúrában van.

A 4.15. példában Y_n-en a pontok $n-4$ különböző Spin^c-struktúrába esnek.

A Whitney-körlapokat legjobban a Σ felületre való „vetületükön" keresztül lehet megérteni. Egy Heegaard-diagramot megadó α- és β-görbék a Σ felületet tartományokra osztják: $\Sigma - \cup\boldsymbol{\alpha} - \cup\boldsymbol{\beta} = \coprod \mathcal{D}_i$. Válasszunk minden tartományból egy $z_i \in \mathcal{D}_i$ referenciapontot.

5.12. definíció. A $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ Whitney-körlap *multiplicitása* a $\mathcal{D}_i$ tartományban

$$n_i(\phi) = \#\left\{u^{-1}\left(z_i \times \mathrm{Sym}^{g-1}(\Sigma)\right)\right\},$$

ahol $\phi = [u]$ transzverzális $z_i \times \mathrm{Sym}^{g-1}(\Sigma)$-re. A multiplicitás csak a homotópiaosztálytól függ. A $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ Whitney-körlap *tartománya*

$$\mathcal{D}(\phi) = \sum n_i(\phi)\mathcal{D}_i.$$

A $\mathcal{D}(\phi)$ tartomány egy 2-lánc, melyre a következő teljesül:

5.13. állítás. *Rendezzük az $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_g\}$ és $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_g\}$ metszéspontok indexeit úgy, hogy $x_i \in \alpha_i \cap \beta_i$ és $y_i \in \alpha_i \cap \beta_{\sigma^{-1}(i)}$ (ahol $\sigma \in S_g$), ekkor:*

1. $\partial\mathcal{D}(\phi)\big|_{\alpha_i}$ *egy x_i-t y_i-vel összekötő út;*
2. $\partial\mathcal{D}(\phi)\big|_{\beta_i}$ *egy $y_{\sigma(i)}$-t x_i-vel összekötő út.* ■

Fordítva:

5.14. definíció. Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{D} = \sum n_i\mathcal{D}_i$ formális összeg *összeköti* $\mathbf{x}$-et $\mathbf{y}$-nal, ha teljesül rá az 5.13. állítás 1. és 2. következménye.

A 5.13. állítás általában megfordítható:

5.15. állítás. *Ha $g > 1$, akkor minden $\mathbf{x}$-et $\mathbf{y}$-nal összekötő $\mathcal{D}$ tartomány egy $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tartománya, azaz $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\phi)$. Sőt $g > 2$ estén ϕ egyértelmű.* ■

Ebből pedig:

5.16. állítás. *$g > 2$ esetén a $\pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ halmaz üres (ha $\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$), vagy*

$$\pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cong \mathbb{Z} \oplus H_2(Y). \qquad ■$$

Az első koordinátát a $\phi \mapsto n_z(\phi)$ leképezés adja egy tetszőleges $z \in \Sigma - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}$ referenciapontra. Ez a leképezés persze függ a z pont választásától. A későbbiek során szükséges lesz z rögzítése.

5.17. definíció. A $z \in \Sigma - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}$ rögzített pontot *bázispontnak* nevezzük, a $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, z)$ négyest pedig *pontozott Heegaard-diagramnak.*

Ugyanazon pontokat összekötő körlapok tartományainak különbségének pereme zárt 1 dimenziós sokaság, azaz teljes α-, és β-görbékből áll. Ennek analógiájára:

5.18. definíció. Egy $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, z)$ pontozott Heegaard-diagramon a $\mathcal{P} = \sum n_i \mathcal{D}_i$ tartomány *periodikus tartomány,* ha $n_z(\mathcal{P}) = 0$, és $\mathcal{P}$ határa teljes α-, és β-görbékből áll.

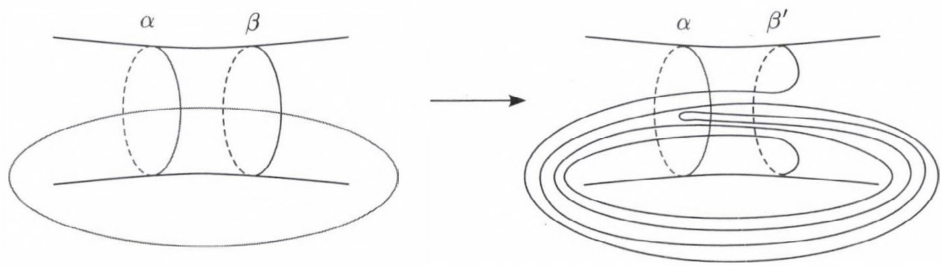
A fentiek alapján a periodikus tartományok vektortere $H_2(Y)$-nal azonosítható.

5.19. definíció. Egy $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, z)$ pontozott Heegaard-diagram *megengedett,* ha minden $\mathcal{P} = \sum n_i \mathcal{D}_i$ nemtriviális periodikus tartománynak van pozitív és negatív együtthatója is.

Ha $b_1(Y) = 0$, akkor $H_2(Y) = 0$, azaz Y minden Heegaard-diagramja megengedett. Általában pedig:

5.20. állítás [19]. *Tetszőleges $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ Heegaard-diagram izotópiával megengedetté tehető.* ∎

A fenti állítás a Heegaard-diagram egy izotópiájával érhető el, mely során egy β-görbét esetleg többször megcsavarunk egy-egy az α-görbékkel transzverzális görbe mentén (lásd 17. ábra). A továbbiakban pontozott és megengedett Heegaard-



17. ábra. Egy β-görbe csavarása

diagramokkal szeretnénk foglalkozni, ezért a 4.20. tételt általánosítanunk kell ilyen Heegaard-diagramokra. Pontozott Heegaard diagramok izotópiája olyan izotópia, mely végig diszjunkt z-től. Pontozott fogantyúcsúsztatás esetén a görbék által határolt nadrágról megköveteljük, hogy diszjunkt legyen z-től. A stabilizáció során az összefüggő összegzést z-től diszjunktan hajtjuk végre. Ekkor:

5.21. tétel [19]. *Ha a $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, z)$ és a $(\Sigma', \boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}', z')$ megengedett Heegaard-diagramjai az Y 3-sokaságnak, akkor pontozott Heegaard-műveletekkel megengedett Heegaard-diagramokon keresztül egymásba vihetők.* ∎

Csak a bázispont áthelyezése megoldható stabilizáció nélkül:

5.22. tétel [19]. *A $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, z)$ és $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, z')$ pontozott megengedett Heegaard-diagramok pontozott izotópiával, pontozott fogantyúcsúsztatása megengedett Heegaard-diagramokon keresztül egymásba vihetők.* ■

5.2. Holomorf körlapok. A Morse-elmélet általánosításaként a holomorf leképezések sok érdekes topológiai helyzetben jóldefiniált homológiaelméletet, a Floer-elméletet szolgáltatják. A Heegaard–Floer-elmélet a Lagrange–Floer-homológia mintájára olyan holomorf körlapokat vizsgál, melyek határa rögzített (Lagrange-féle) részsokaságokba megy. Láttuk, hogy a Σ-n adott komplex struktúra $\mathrm{Sym}^g(\Sigma)$-n is definiál egy komplex struktúrát. Első közelítésben az erre a struktúrára nézve holomorf Whitney-körlapokat fogjuk vizsgálni. Ehhez rögzítsünk $\mathbb{D}$-n is egy komplex struktúrát. Mostantól egy $u : \mathbb{D} \to \mathrm{Sym}^g(\Sigma)$ leképezést holomorfnak nevezünk, ha holomorf $\operatorname{int}\mathbb{D}$-n, és folytonosan terjed ki $\partial\mathbb{D}$-re.

5.23. definíció. A $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ homotópiaosztályt reprezentáló holomorf diszkek tere az $\mathcal{M}(\phi)$ *modulustér.*

A $\mathrm{Sym}^g(\Sigma)$-beli holomorf körlapokat Σ-n is látni lehet:

5.24. állítás. *Egy $u : \mathbb{D} \to \mathrm{Sym}^g(\Sigma)$ holomorf leképezéshez létezik $\mathbb{D}$-nek egy $p : F \to \mathbb{D}$ g-szeres elágazó fedése, és u-nak egy $\widehat{u} : F \to \Sigma$ holomorf felemelése, melyre az $\widehat{u}(p^{-1}(z))$ g-es épp $u(z)$:*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\widehat{u}"] \arrow[d, "p"] & \Sigma \\ \mathbb{D} \arrow[r, "u"] & \mathrm{Sym}^g(\Sigma). \end{tikzcd}$$

Egy $u \in \mathcal{M}(\phi)$ leképezést egy olyan $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ konform automorfizmussal komponálva, mely fixen tartja i-t és $-i$-t, megint $\mathcal{M}(\phi)$-beli elemet kapunk. A $\mathbb{D}$ körlap i-t és $-i$-t fixen hagyó konform automorfizmusainak tere $\mathbb{R}$-rel izomorf (hiszen egy konform automorfizmust a határkör 3 pontjának képével egyértelműen meg lehet adni). Így $\mathcal{M}(\phi)$-n van egy $\mathbb{R}$-hatás, mely szabad a nem konstans elemeken; jelölje az e szerinti faktort $\widehat{\mathcal{M}(\phi)}$. Az $\mathcal{M}(\phi)$ tér nem feltétlenül sokaság, de a $\mathrm{Sym}^g(\Sigma)$-n használt komplex struktúra egy generikus (majdnem) komplex struktúrává perturbálásával már az lesz. Ebben az esetben $\mathcal{M}(\phi)$ dimenziója, a $\mu(\phi)$ *Maslov-index,* egy általános elmélet segítségével kiszámítható. A Maslov-index összefűzésnél összeadódik, azaz ha $\phi_1 \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ és $\phi_2 \in \pi_2(\mathbf{y}, \mathbf{v})$, akkor:

$$\mu(\phi_1 * \phi_2) = \mu(\phi_1) + \mu(\phi_2).$$

Egy gömb ráragasztásakor pedig:

5.25. állítás [19]. *Az* $[S] \in \pi_2(\mathrm{Sym}^g(\Sigma))$ *generátorra:*

$$\mu(\phi + k[S]) = \mu(\phi) + 2k. \qquad \blacksquare$$

A komplex részsokaságok pozitívan metszik egymást, ezért:

5.26. állítás. *Ha* $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *homotópiaosztálynak van holomorf reprezentánsa, akkor a* $\mathcal{D}(\phi) = \sum n_i \mathcal{D}_i$ *tartomány minden* n_i *együtthatója nemnegatív:* $n_i \geq 0$. ∎

Modulusterek megértése általában Gromov kompaktsági tételén múlik [5]. Ebben az esetben generikus komplex struktúrára belátható:

5.27. állítás. *Amennyiben az* $\mathcal{M}(\phi)$ *modulustér dimenziója épp* 1, *akkor az* $\mathbb{R}$*-hatással faktorizált* $\widehat{\mathcal{M}}(\phi)$ *tér egy kompakt* 0 *dimenziós sokaság, azaz véges sok pont.*

Ezek száma fogja adni $\mathbf{y}$ együtthatóját $\mathbf{x}$ határában. A magasabb dimenziós modulusterek nem kompaktak, de kompakttá tehetőek. Az 1 dimenziós esetben a kompaktifikációhoz bevezetett új pontok törött trajektóriákból állnak:

5.28. állítás. *Ha* $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$*-ra* $\mu(\phi) = 2$, *akkor generikus komplex struktúra esetén* $\mathcal{M}(\phi)$ *kompakttá tehető, és az új pontok:*

$$\partial\overline{\mathcal{M}(\phi)} = \coprod_{\phi = \phi_1 * \phi_2} \mathcal{M}(\phi_1) \times \mathcal{M}(\phi_2). \qquad \blacksquare$$

A Maslov-index additivitása szerint $\mu(\phi) = \mu(\phi_1) + \mu(\phi_2)$. Ha ϕ_i nem konstans (pl. ha a végpontjai különbözőek), akkor az $\mathbb{R}$-hatás miatt $\mu(\phi_i) = 0$ esetén generikus komplex struktúrára ϕ_i-nek nincsen holomorf reprezentánsa, azaz a fenti állításban:

$$\mu(\phi_1) = \mu(\phi_2) = 1.$$

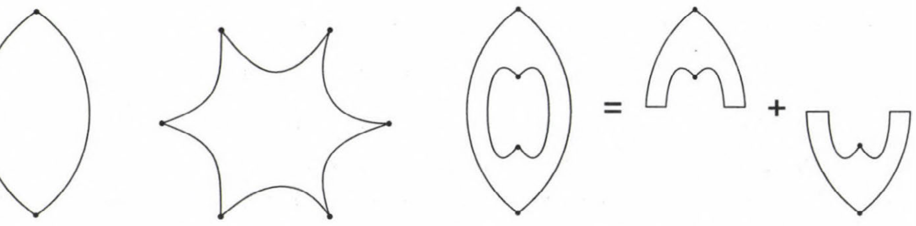
5.3. Index formula. R. Lipshitz adott az $\mathcal{M}(\phi)$ modulustér dimenziójára egy kombinatorikusan számítható formulát. A dimenzió csak a leképezéshez rendelt $\mathcal{D}(\phi) = \sum n_i(\phi)\mathcal{D}_i$ tartománytól függ, a formula ehhez a tartományhoz rendelt értékekből az e Euler-mértékből, és az $\mu_{\mathbf{x}}$, $\mu_{\mathbf{y}}$ pont mértékekből számítható.

5.29. definíció. Válasszunk Σ-n egy olyan Riemann-metrikát, melyre nézve az α és a β görbék merőlegesen metszik egymást. A $\mathcal{D}_i$ tartomány $e(\mathcal{D}_i)$ Euler-mértéke legyen $\mathcal{D}_i$ e metrika szerint számított mértéke. Ezt a mértéket additívan terjesztjük ki a tartományokra: $\mathcal{D} = \sum n_i \mathcal{D}_i$ tartomány Euler-mértéke legyen $e(\mathcal{D}) = \sum n_i e(\mathcal{D}_i)$. Egy $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ leképezés *Euler-mértéke:*

$$e(\phi) = e(\mathcal{D}(\phi)) = \sum n_i(\phi) e(\mathcal{D}_i).$$

A Gauss–Bonnet-tétel segítségével ez a formula még egyszerűbb alakra hozható. Egy csupa derékszögű sarkot tartalmazó $\mathcal{P}$ n-szög területe $e(\mathcal{P}) = 1 - \frac{n}{4}$. Ebből pedig egy tetszőleges tartomány Euler-mértékét az additivitás felhasználásával számíthatjuk ki (18. ábra).

A pontmérték definíciója még egyszerűbb:



$e = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $e = 1 - \frac{6}{4} = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $e = 1 - \frac{6}{4} + 1 - \frac{6}{4} = -1$

18. ábra. Az Euler-mérték kiszámítása

5.30. definíció. Egy $x \in \alpha \cap \beta$ metszéspontban négy (nem feltétlenül különböző) tartomány találkozik, jelölje ezek $\mathcal{D}(\phi)$-beli multiplicitását rendre a, b, c és d. Ekkor az x pont pontmértéke:

$$\mu_x(\phi) = \frac{a+b+c+d}{4}.$$

Az $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_g\} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ metszéspont *pontmértéke*

$$\mu_{\mathbf{x}}(\phi) = \mu_{x_1}(\phi) + \cdots + \mu_{x_g}(\phi).$$

A kombinatorikus formula pedig:

5.31. tétel [8]. *A $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ homotópiaosztályhoz tartozó modulustér dimenziója:*

$$\mu(\phi) = e(\phi) + \mu_{\mathbf{x}}(\phi) + \mu_{\mathbf{y}}(\phi). \qquad \blacksquare$$

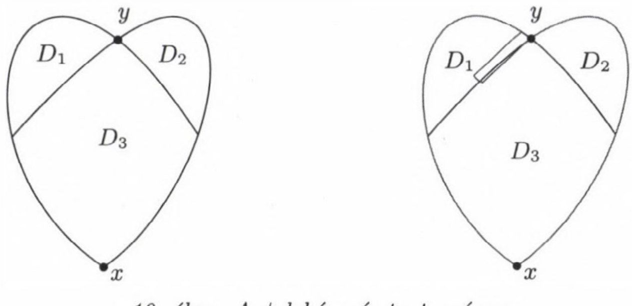
A formula ellenőrzéseképpen vizsgáljuk meg a következő két példát.

5.32. példa. Mivel a körlap konform automorfizmusainál 3 határpont képe meghatározza a leképezést, így a 18. ábrán látható $\mathcal{D}(\phi) = \mathcal{D}$ tartományhoz tartozó holomorf leképezések tere 1 dimenziós. Az indexformula szintén 1-et ad:

$$\mu(\phi) = e(\phi) + \mu_{\mathbf{x}}(\phi) + \mu_{\mathbf{y}}(\phi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

5.33. példa. A 19. ábra bal oldalán látható $\mathcal{D}(\phi) = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_3$ tartományú holomorf körlapok $\mathcal{M}(\phi)$ tere 2 dimenziós, az $\mathbb{R}$-rel vett faktorizáció utáni $\widehat{\mathcal{M}}(\phi)$ pedig 1 dimenziós. Vágjuk be ugyanis a szívet a 19. ábra jobb oldala szerint az α-görbe mentén. Ekkor a Riemann-leképezés tétele szerint létezik $\mathbb{D}$-nek olyan holomorf leképezése $\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_3$-ba, mely a határon épp a bevágásig megy. A bevágás akármilyen hosszú lehet (amíg nem megy ki a határig), és a β-görbe mentén is vághatunk, de az $e_\alpha \subset \mathbb{T}_\alpha$, $e_\beta \subset \mathbb{T}_\beta$ határfeltételek miatt egyszerre mindkettőn nem. Ezek szerint az $\widehat{\mathcal{M}}(\phi)$ modulustér egy nyílt (a bevágás hosszával paraméterezett) szakasz, azaz 1 dimenziós. Az indexet a képlet szerint kiszámítva:

$$\mu(\phi) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 2,$$



19. ábra. A ϕ leképezés tartománya

és így a képlet szerint is: $\dim\left(\widehat{\mathcal{M}}(\phi)\right) = \mu(\phi) - 1 = 1$. Ugyanezen a példán jól látszik az is, hogy az 1 dimenziós modulustér nem kompakt, de kompaktifikálható. Jelölje ϕ_1, ϕ_2, ψ_1 és ψ_2 a $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_3$ és $\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_3$ tartományú leképezéseket. Mind a 4 tartomány kétszög, így az előbbi példa szerint $\mu(\phi_1) = \mu(\phi_2) = \mu(\psi_1) = \mu(\psi_3) = 1$. Amikor az α-görbe menti bevágás közel van a határhoz, a ϕ leképezés majdnem szétesik a ψ_1 és a ϕ_1 leképezésekre, és hasonlóan a másik határnál a ψ_2 és a ϕ_2 leképezésekre. Így hihető, hogy $\mathcal{M}(\phi)$ modulusteret $\mathcal{M}(\phi_1) \times \mathcal{M}(\psi_1)$-gyel és $\mathcal{M}(\phi_1) \times \mathcal{M}(\psi_1)$-gyel kompaktifikálhatjuk.

6. Heegaard–Floer-homológiák

Az eddigi fejezetekben mindent felépítettünk ahhoz, hogy könnyen definiálhassuk a Heegaard–Floer-homológiákat. A legegyszerűbb változatban a lánckomplexus alaphalmaza $\widehat{CF}(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, z)$, a $\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ metszéspontok által generált $\mathbb{Z}_2$ vektortér. A 4 dimenziós elmélet hiányában csak egy relatív gradálást tudunk megadni:

6.1. definíció. Az $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ metszéspontok gradálásának különbsége:

$$\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu(\phi) - 2n_z(\phi),$$

ahol $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tetszőleges. A $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ érték az 5.25. állítás szerint független ϕ választásától.

Ez a relatív gradálás minden Spin^c-struktúrában ad egy additív konstans erejéig jól definiált gradálást, melyet (az additív konstans rögzítése után) *Maslov-gradálásnak* hívunk.

6.2. definíció. A $\widehat{\partial} : \widehat{CF}(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, z) \to \widehat{CF}(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, z)$ *határleképezés* egy $\mathbf{x} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ generátoron:

$$\widehat{\partial}\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta} \sum_{\substack{\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mu(\phi) = 1 \\ n_z(\phi) = 0}} \left|\widehat{\mathcal{M}}(\phi)\right| \mathbf{y}.$$

A határleképezés a teljes lánckomplexusra lineárisan terjed ki.

Egy megengedett diagramra a második összeg véges:

6.3. állítás [19]. *Egy megengedett $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, z)$ Heegaard-diagramra az $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ metszéspontokat összekötő holomorf reprezentánssal rendelkező $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ Whitney-körlapok száma véges.* ■

Tehát $\widehat{\partial}$ jól definiált. Könnyen látható, hogy $\widehat{\partial}$ a gradálást eggyel csökkenti, és valóban lánckomplexust definiál:

6.4. állítás. $\widehat{\partial}^2 = 0$.

Bizonyítás alapötlete.

$$\widehat{\partial}^2\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{y}\in\mathbb{T}_\alpha\cap\mathbb{T}_\beta} \sum_{\substack{\phi_1\in\pi_2(\mathbf{x},\mathbf{y})\\ \mu(\phi_1)=1\\ n_z(\phi_1)=0}} \left(\sum_{\mathbf{v}\in\mathbb{T}_\alpha\cap\mathbb{T}_\beta} \sum_{\substack{\phi_2\in\pi_2(\mathbf{y},\mathbf{v})\\ \mu(\phi_2)=1\\ n_z(\phi_2)=0}} |\widehat{\mathcal{M}}(\phi_1)||\widehat{\mathcal{M}}(\phi_2)|\mathbf{v} \right).$$

A fenti képletben a nem nulla együtthatójú $\mathbf{v}$ elemek fokszáma 2-vel kisebb $\mathbf{x}$ fokszámánal, azaz egy $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{v})$-hez tartozó $\mathcal{M}(\phi)$ modulustér kétdimenziós. Az 5.28. állítás szerint szerint $\mathcal{M}(\phi)$ kompaktifikálható a

$$\coprod_{\phi=\phi_1*\phi_2} \mathcal{M}(\phi_1) \times \mathcal{M}(\phi_2)$$

pontokkal. Ilyen módon $\widehat{\mathcal{M}}(\phi)$ 1 dimenziós részsokaság, melynek végei a $\phi = \phi_1 * \phi_2$ $(\mu(\phi_1) = \mu(\phi_2) = 1)$ felbontásokhoz tartoznak. Ezen felbontások épp $\mathbf{v}$ együtthatóit adják. A köztük lévő utak pedig egy párosítást adnak az együtthatók között. Mivel $\mathbb{Z}_2$ felett dolgozunk, $\mathbf{v}$ együtthatója 0, azaz $\widehat{\partial}^2\mathbf{x} = 0$. ■

A homológia invarianciájához elég belátni, hogy invaráns a pontozott Heegaard-műveletekre. Az α- és β-görbék izotópiája egy egzakt Hamilton-izotópiáját indukálja a $\mathbb{T}_\alpha$, illetve $\mathbb{T}_\beta$ tóruszoknak $\mathrm{Sym}^g(\Sigma)$-ban, és így a Lagrange–Floer-elméletből következik, hogy az izotópia homotópikus ekvivalenciát definiál a lánckomplexuson. Perutz [25] eredménye szerint ugyanez az elv alkalmazható a fogantyúcsúsztatásra is. A csúsztatott Heegaard-diagramhoz tartozó tórusz Hamilton-izotóp az eredeti tórusszal, és így a lánckomplexusok megint homotópikus ekvivalensek. Stabilizáció során a Heegaard-diagram összefüggő összegét képezzük a 4.12. példabeli (T^2, α_0, β_0) Heegaard-diagrammal. Már tudjuk, hogy a homológia független az izotópiától, ezért a bázispontot akárhova helyezhetjük. Tegyük fel, hogy az összefüggő összeget a z-t tartalmazó tartományban képezzük. Ekkor az $x_0 = \alpha_0 \cap \beta_0$ metszéspont hozzáfűzése egy 1-1 értelmű megfeleltetést létesít a $\widehat{CF}(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, z)$ és a $\widehat{CF}(\Sigma\#T^2, \boldsymbol{\alpha} \cup \{\alpha_0\}, \boldsymbol{\beta} \cup \{\beta_0\}, z)$ lánckomplexusok elemei között, sőt a bázispont elhelyezése miatt a határleképezést definiáló körlapok is megfeleltethetőek egymásnak a két lánckomplexusban. Tehát a két lánckomplexus, és így a homológiájuk is, izomorf. Ezzel beláttuk:

6.5. tétel [19]. *Az Y 3-sokaság $\widehat{HF}(Y) = H_*(\widehat{CF}(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, z), \widehat{\partial})$ Heegaard–Floer-homológiája független az Y 3-sokaságot definiáló megengedett, pontozott Heegaard-diagram választásától, és így egy 3-sokaság invariánst definiál.* ■

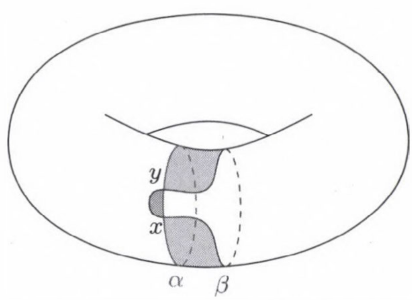
Az eddigi példák majdnem mindegyikének Heegaard-diagramja elég egyszerű, és így ki tudjuk számítani a Heegaard–Floer-homológiájukat:

6.6. példa. S^3 4.12. példabeli Heegaard-diagramjának könnyen kiszámítható a Heegaard–Floer-homológiája, hiszen csak egy generátora van. Így

$$\widehat{CF}(T^2, \alpha_0, \beta_0, z) = \mathbb{Z}_2.$$

Az egyetlen tartomány pedig tartalmazza a bázispontot, azaz a határleképezés 0, és így S^3 Heegaard–Floer-homológiája $\mathbb{Z}_2$.

6.7. példa. $S^1 \times S^2$-nek 4.13. példabeli Heegaard-diagramja nem megengedett, egyáltalán nincs rajta metszéspont. Egy kis csavarással bevezethetünk két metszéspontot. Ha a bázispontot a „nagy" tartományba rakjuk (lásd 20. ábra), akkor a diagram – mivel csak egy periodikus tartományt tartalmaz – könnyen ellenőrizhetően megengedett. A lánckomplexust a két metszéspont x és y generálja, és a két szürke bigon egy-egy határleképezést ad x-ből y-ba. Mivel ez az összes határleképezés, és $\mathbb{Z}_2$ felett dolgozunk, így $\widehat{\partial} = 0$, és így $\widehat{HF}(S^1 \times S^2) = \mathbb{Z}_2^2$.



20. ábra. $S^1 \times S^2$ *egy megengedett Heegaard-diagramja*

6.8. példa. A 4.14. példában megadott Heegaard-diagramokon szintén nincsenek határleképezések, és így $\widehat{HF}\big(L(p,q)\big) = \mathbb{Z}_2^p$.

6.1. További Heegaard–Floer-homológiák. Az előző fejezetben a lánckomplexus $\mathbb{Z}_2$-vektortér volt, megfelelő irányítás bevezetésével az egész elmélet $\mathbb{Z}$-modulusokra is kiterjeszthető. Csak arra kell vigyázni, hogy a $\widehat{\partial}^2 = 0$ egyenlőség teljesüljön, az általánosítás többi része automatikus. Továbbmenve, a Heegaard–Floer-homológia definiálható olyan határleképezéssel is, mely metszi a bázisponthoz tartozó $V_z = \{z\} \times \mathrm{Sym}^{g-1}(\Sigma)$ divizort. Ekkor valahogy azt is számon kell tartanunk, hogy egy körlap hányszor metszette V_z-t: erre szolgál az U formális változó.

6.9. definíció. A $CF^\infty(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ lánckomplexus alaphalmaza a $\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ metszéspontok által generált $\mathbb{Z}_2[U, U^{-1}]$-modulus (vagy $\mathbb{Z}[U, U^{-1}]$-modulus). A határleképezést pedig a

$$\partial^\infty \mathbf{x} = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta} \sum_{\substack{\phi \in \pi_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ \mu(\phi)=1}} \left|\widehat{\mathcal{M}}(\phi)\right| U^{n_z(\phi)} \mathbf{y}$$

egyenlőség definiálja a generátorokon. A Maslov-gradálást $M(U^a\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -2a$-val kiterjesztve CF^∞ egy (relatívan) gradált lánckomplexus.

A fenti összeg végességét egy erősebb feltétel, az erős megengedettség biztosítja. Azonban a lánckomplexus HF^∞ homológiája racionális homológia gömbökre izomorf a $\mathbb{Z}_2[U, U^{-1}]$ Laurent-polinomgyűrűvel, úgyhogy nem szolgáltat érdekes invariánst. Szerencsére a z bázispont ad egy filtrálást a lánckomplexuson, és így tudunk hasznos invariánsokat definiálni:

6.10. definíció. Jelölje $CF^-(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ a metszéspontok által generált $\mathbb{Z}_2[U]$-modulust. Mivel a holomorf reprezentással rendelkező ϕ körlapokra $n_z(\phi) \geq 0$, így $CF^-(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ részkomplexusa $CF^\infty(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$-nak. Jelölje $CF^+(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ a faktort:

$$CF^+(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{CF^\infty(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{CF^-(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}.$$

A lánckomplexusok által definiált homológiákat jelölje

$$HF^-(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \quad \text{és} \quad HF^+(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}).$$

A fenti homológiák 3-sokaság invariánsokat definiálnak:

6.11. tétel [19]. *Az Y 3-sokaság* Heegaard–Floer-homológiái:

$$HF^-(Y) = H_*\big(CF^-(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \partial\big) \quad \textit{és} \quad HF^+(Y) = H_*\big(CF^+(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \partial\big)$$

függetlenek az Y 3-sokaságot definiáló erős-megengedett, pontozott Heegaard-diagram választásától, és így 3-sokaság invariánsokat definiálnak. ■

Ezek a homológiák is kiszámíthatóak az előbbi példákra. S^3-ra például:

$$HF^\infty(S^3) = \mathbb{Z}[U, U^{-1}], \quad HF^-(S^3) = \mathbb{Z}[U^-{}^{\text{‘}}1] \quad \text{és} \quad HF^+(S^3) = \mathbb{Z}[U].$$

6.2. A Heegaard–Floer-homológia számíthatósága. A indexformulának köszönhetően $\widehat{HF}$ kombinatorikusan számítható. Sarkar és Wang tétele [29] szerint amennyiben egy Heegaard-diagram a z-t tartalmazó tartományon kívül csak két-, illetve négyszöget tartalmaz (az ilyen diagramokat *szépnek* nevezték el), akkor minden $\widehat{\partial}$ során figyelembe vett holomorf diszk tartománya kétszög, illetve négyszög lesz. A majdnem komplex struktúrától függetlenül mind a kétszögeknek, mind a négyszögeknek (az $\mathbb{R}$-hatással való faktorizálás után) egyértelmű holomorf reprezentánsuk van, azaz $|\widehat{\mathcal{M}}(\phi)| = 1$. Tehát a határleképezés kiszámítása a Heegaard-diagramon való két pontot összekötő kétszögek és négyszögek számlálására redukálódik. Szintén Sarkar és Wang eredménye, hogy bármely diagram izotópia és fogantyúcsúsztatás segítségével széppé tehető, és így $\widehat{HF}$ valóban számítható kombinatorikus eszközökkel. Az algoritmus során kapott szép diagramok azonban általában egyáltalán nem „szépek": nagyon sok metszéspontot tartalmaznak. Érdekes kérdés, hogy definiálható-e a Heegaard–Floer-homológia kombinatorikusan. Ozsváth, Stipsicz és Szabó [24] belátta, hogy a vizsgált Heegaard-diagramok szűkítésével $\widehat{HF}$ esetében ez is lehetséges.

7. Alkalmazások

A Heegaard–Floer-homológiák elmélete jelenleg is fejlődik, de már most is számos alkalmazása van, pl. kontakt struktúrák invariánsait is lehet a segítségükkel definiálni. Sőt az elméletnek van csomóinvariánst és 4 dimenziós invariánst adó változata is. A továbbiakban az utóbbi kettőről ejtünk néhány szót. Ennek a fejezetnek, főleg a 4-sokaságokról szóló alfejezetnek a tárgyalása kevésbé bevezető jellegű, és bizonyos – itt nem tárgyalt – előismereteket is feltételez.

7.1. 4-sokaságok.

A Heegaard–Floer-homológiáknak van egy 4 dimenziós változatuk is; első közelítésben kobordáns sokaságok Heegaard–Floer-homológiái között lehet egy leképezést definiálni:

7.1. definíció. Legyen Y_1 és Y_2 két 3-sokaság. A W 4-sokaság egy Y_1-et Y_2-vel összekötő *kobordizmus,* ha $\partial W = Y_2 \cup -Y_1$. A kobordizmust $Y_1 \xrightarrow{W} Y_2$ -vel jelöljük.

7.2. tétel [20]. *Legyen W az Y_1-et, Y_2-vel összekötő kobordizmus; ekkor a Heegaard–Floer-homológiák bármely változatára definiálható egy:*

$$F_W : HF^*(Y_1) \to HF^*(Y_2)$$

leképezés. (Itt HF^* a $\widehat{HF}$, HF^∞, HF^- és HF^+ homológiák egyikét jelöli.) ∎

A leképezés konstrukciója azon múlik, hogy minden kobordizmus fogantyúkra bontható fel. Az egyes fogantyúragasztáshoz tartozó leképezések definiciója után az egész kobordizmushoz tartozó leképezés ilyenek kompozíciójaként áll elő. Annak bizonyítása, hogy az így definiált leképezés független a választott fogantyúfelbontástól megint a szokásos trükkön múlik: megadhatóak az ugyanazt a kobordizmust leíró fogantyúfelbontások közötti lépések, amelyre belátható az invariancia. Ezek után a naiv definíció egy X zárt 4-sokaság Heegaard–Floer-homológiájára az lenne, hogy kivágunk X-ből két golyót, és tekintjük az így definiált:

$$F_{X-B^4-B^4} : \mathrm{HF}^*(S^3) \to \mathrm{HF}^*(S^3)$$

leképezést, mely ha $\mathbb{Z}$ együtthatókkal dolgozunk, akkor $\widehat{HF}(S^3) = \mathbb{Z}$ miatt, egy $n \mapsto a \cdot n$ leképezés. Így az a szám az X 4-sokaság egy invariánsa. Ez az invariáns azonban sok érdekes esetben is 0. Ezért vezették be a *Heegaard–Floer vegyes 4-sokaság invariánst,* melynek definíciója kicsit bonyolultabb, és csak olyan 4-sokaságokra invariáns, amelyekre $b_2^+(X) > 1$ (ez a feltétel a Seiberg–Witten-invariánsok definíciójához is szükséges). A konstrukció a sokaság két részre vágásán múlik, és végül is egy $\mathrm{HF}^- \to \mathrm{HF}^+$ leképezést ad. A Spin^c struktúrák 4-sokaságokra is definiálhatóak, és a 4-sokaságokon adott Spin^c struktúrák Spin^c struktúraként szorulnak meg a peremekre. A fenti leképezések mind felbomlanak Spin^c-struktúrák szerint. Így a fenti megközelítés (a Seiberg–Witten-invariánsokhoz hasonlóan) X minden Spin^c-struktúrájára ad egy-egy invariánst.

7.2. Műtéti egzakt háromszög. Annak ellenére, hogy a Heegaard–Floer-homológia kombinatorikusan számítható, bonyolultabb 3-sokaságokra maguk a számítások továbbra sem kivitelezhetőek, még számítógép segítségével sem. A műtéti egzakt háromszög segítségével azonban a számításokat néha indukciószerű eljárással lehet helyettesíteni. Minden 3-sokaság 4-sokaságot határol, azaz megadható egy kobordizmus S^3 és Y között, sőt olyan kobordizmus is található, mely során csak 2-fogantyúkat ragasztunk. A 2-fogantyú ragasztása során a perem 3-sokaság egy csomó menti műtéttel változik. Legyen K egy csomó és $N(K)$ egy csőszerű környezete egy Y 3-sokaságban. A $\partial N(K)$ tóruszon a meridián az a μ görbe, mely körlapot határol $N(K)$-ban; ez izotópia erejéig egyértelmű. A csomó *tüskézése* egy, a meridiánt egy pontban metsző λ görbe a tórusz felületén. Ez nem egyértelmű, de ha a csomó nullhomológ, azaz határol felületet, akkor általában azt a görbét szokás választani, amely $Y - \mathring{N}(K)$-ban határol felületet. Ez a görbe a csomó *Seifert-tüskézése.* A csomó irányítása irányítja a tüskézést, és a meridiánt is. Az $Y - \mathring{N}(K)$ 3-sokaság peremes határa egy tórusz, így egy tömör tórusz beragasztásával a sokaság ismét zárttá tehető. Mint azt a tömör fogantyúk leírásánál láttuk, a ragasztás megadásához elegendő rögzíteni a meridián (a tömör tóruszban körlapot határoló görbe) képét. Ez pedig egy görbe ∂Y-on, melyet a tüskézés fog megadni.

7.3. definíció. Az Y 3-sokaságból a (K, λ) tüskézett csomó menti *műtét* az

$$Y_\lambda(K) = Y - \mathring{N}(K) \cup_{T^2} D^2 \times S^1$$

3-sokaságot képzi, ahol a peremek azonosítása a $\partial D^2 \times \{*\} \to \lambda$ diffeomorfizmussal történik.

Egy műtét egyértelműen megad egy $Y \xrightarrow{W_{(K,\lambda)}} Y_\lambda(K)$ kobordizmust is, melyet a (K, λ) menti fogantyúragasztással kapunk $Y \times I$-ből. Legyen λ, κ két egymást egy pontban metsző tüskézése a K csomónak, úgy hogy (μ, λ) és (μ, κ) ugyanazt az irányítását adják T^2-nek. A két tüskézés definiálja kobordizmusoknak egy háromszögét:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "W_0"] & & Y_\lambda(K) \arrow[dl, "W_1"] \\
& Y_\kappa(K) \arrow[ul, "W_2"] &
\end{tikzcd}$$

ahol $W_0 = W_\lambda(K)$, és a többi kobordizmus is műtétekhez tartozik (de nem K mentiekhez). A fenti háromszöghöz tartozó leképezések a Heegaard–Floer-homológiákon egy egzakt háromszöget indukálnak.

7.4. tétel [13]. *A fenti jelölésekkel*

$$\begin{tikzcd}
\widehat{HF}(Y) \arrow[rr, "F_{W_0}"] & & \widehat{HF}(Y_\lambda(K)) \arrow[dl, "F_{W_1}"] \\
& \widehat{HF}(Y_\kappa(K)) \arrow[ul, "F_{W_2}"] &
\end{tikzcd}$$

háromszög egzakt.

E tétel segítségével számíthatóak ki pl. a 4.15. példában definiált Y_n háromsokaságok homológiái. Y_n a háromlevelű csomó menti $n-4$ (azaz a $\lambda + (n-4)\mu$ görbe menti) műtét eredménye. $n = 3$-ra például a háromlevelű csomón -1-műtétet végzünk, így a $\Sigma(2,3,5)$ Poincaré-homológiagömböt kapjuk, melyre:

7.5. tétel [14]. *A Poincaré-homológiagömb Heegaard–Floer-homológiája:*

$$HF^+(\Sigma(2,3,5)) = U\mathbb{Z}[U].$$

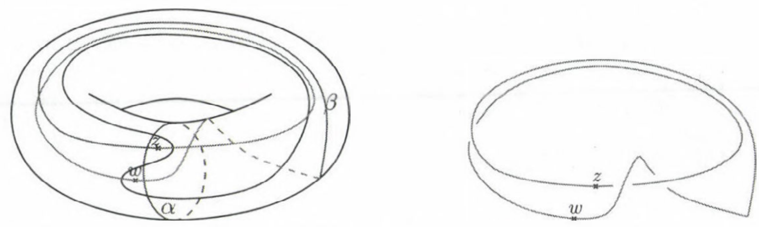
Azaz csak a gradálás különbözteti meg a S^3 Heegaard–Floer-homológiájától.

7.3. Csomók. Ha egy Heegaard-diagramon két bázispontot adunk meg, akkor a $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, z, w)$ Heegaard-diagramhoz egy új határleképezés definiálható az olyan holomorf körlapok segítségével, melyek egyik bázisponton sem mennek át:

$$\partial \mathbf{x} = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta} \sum_{\substack{\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mu(\phi) = 1 \\ n_z(\phi) = n_w(\phi) = 0}} |\widehat{\mathcal{M}}(\phi)| \mathbf{y}.$$

A fentiekhez hasonlóan $(\widehat{CF}(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \partial)$ egy lánckomplexust ad, és így definiálható a homológiája. Azonban az ugyanazt a 3-sokaságot reprezentáló Heegaard-diagramokat nem lehet „kétszer pontozott” Heegaard-lépésekkel összekötni. Ennek az az oka, hogy a Heegaard-diagram a két bázisponttal már nemcsak a 3-sokaságot, hanem egy benne lévő csomót is elkódol a következőképpen. Mivel $\Sigma - \cup\boldsymbol{\alpha}$ és $\Sigma - \cup\boldsymbol{\beta}$

(pontozott) körlapok, így izotópia erejéig egyértelműen létezik egy z-t w-vel összekötő görbe $a \subset \Sigma - \cup\boldsymbol{\alpha}$-ban, és egy w-t z-vel összekötő görbe $b \subset \Sigma - \cup\boldsymbol{\beta}$-ban. Az α-görbéket nem metsző a görbe belső pontjait egy kicsit U_1-be, míg a b görbe belső pontjait egy kicsit U_2-be tolva $a * b$ egy K csomót definiál, mely épp z-ben és w-ben metszi a Heegaard-felületet (21. ábra). Bármely 3-sokaságban bármely csomót meg



21. ábra. Egy kétszer pontozott Heegaard-diagram által definiált csomó

lehet adni kétszer pontozott Heegaard-diagrammal. Ilyen megadást pl. a csomót az 1-vázában tartalmazó háromszögeléséből képzett Heegaard-felbontásból lehet konstruálni.

7.6. tétel [17, 27]. *Ha* $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, z, w)$ *és* $(\Sigma', \boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}', z', w')$ *megengedett Heegaard-diagramjai az* (Y, K) *3-sokaság-csomó párnak, akkor kétszer pontozott Heegaard-műveletekkel megengedett Heegaard-diagramokon keresztül egymásba vihetők.* ∎

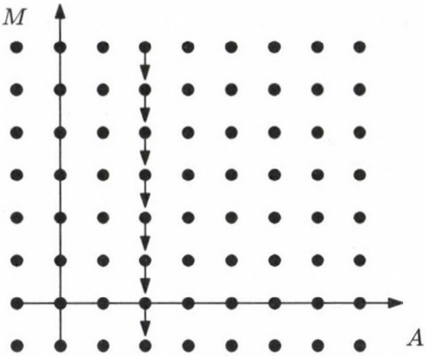
E tétel alapján belátható, hogy a kapott homológia független a használt kétszer pontozott Heegaard-diagramtól; ez a homológia a *K csomó Floer-homológiája*. Jelöljük ezt $\widehat{HFK}(Y, K)$-val. Ha a K csomó egy felületet határol Y-ban, akkor az M Maslov-gradáláson kívül definiálható egy újabb (relatív) gradálás, az *Alexander-gradálás.* Az $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ metszéspontok fokszámkülönbsége legyen

$$A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{y}) = n_z(\phi) - n_w(\phi).$$

A fenti képletben $\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tetszőleges, de persze feltételezzük, hogy $\pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq \emptyset$, azaz $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ ugyanabban a spin^c-struktúrában van. A Seifert-felület létezése a fenti képlet jóldefiniáltságához szükséges. A ∂ differenciál a Maslov-gradálást ($M(\mathbf{x}) - M(\mathbf{y}) = \mu(\phi) - 2n_z(\phi) = 1 - 2 \cdot 0 =$)1-gyel, az Alexander-gradálást pedig ($A(x) - A(y) = n_z(\phi) - n_w(\phi) = 0 - 0$) nem csökkenti. Azaz, az (A, M)-koordinátájú síkon ∂ függőlegesen 1-et megy lefele (22. ábra). Mivel a határleképezés az Alexander-gradálást nem változtatja, így a lánckomplexus felbomlik, és minden Alexander-gradálásra ad egy-egy lánckomplexust. Így $\widehat{HFK}(Y, K)$ is felbomlik a két (relatív) gradálás szerint:

$$HFK(Y, K) = \oplus \widehat{HFK}_M\big((Y, K), A\big).$$

Mostantól csak S^3-beli csomókról lesz szó. S^3-ban minden csomónak van Seifert-felülete, azaz az Alexander-gradálás is jól definiált. Mivel minden S^3-ban történik, így innentől a csomó Floer-homológiában nem jelöljük az alapteret, és $\widehat{HFK}(S^3, K)$ helyett egyszerűen $\widehat{HFK}(K)$-t írunk. Egy D diagramhoz természetes módon tudunk egy Heegaard-diagramot rendelni a következőképpen. A diagramhoz tartozó



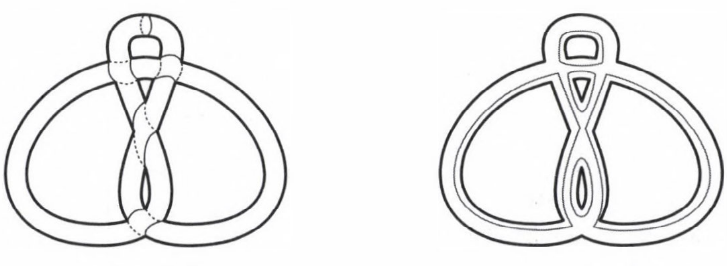
22. ábra. A határleképezés

V vetület (tehát amikor elfelejtjük az alul-felül információt) környezete S^3-ban egy $n+1\big(=\operatorname{cr}(V)+1\big)$ génuszú U_2 fogantyú. Komplementere pedig szintén egy $(n+1)$ génuszú U_1 fogantyú. A Σ Heegaard-felület legyen az $(n+1)$-fogantyúk közös határa. Jelöljük ki a V vetület egy e élét. Minden metszéspont környezetében megadunk egy β-görbét a 23. ábra bal oldalának megfelelően. Ez eddig n darab

egy metszéspont közelében　　　　a kijelölt élnél

23. ábra. A β görbék a Heegaard-diagramon

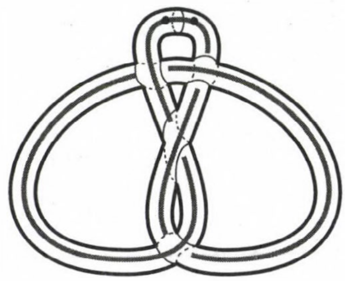
β-görbe. Legyen β_{n+1} az e élhez tartozó meridián (23. ábra jobb oldala). A megadott β-görbék körlapokat határolnak U_2-ben. A csomót követve pedig látszik, hogy $\Sigma-\boldsymbol{\beta}$ összefüggő, azaz a görbék lineárisan függetlenek $H_1(\Sigma)$-ban, és így a β-görbék tényleg az U_2 tömör fogantyút adják meg. A 24. ábra bal oldala a β-görbéket ábrázolja a nyolcascsomóhoz.



a β-görbék　　　　az α-görbék

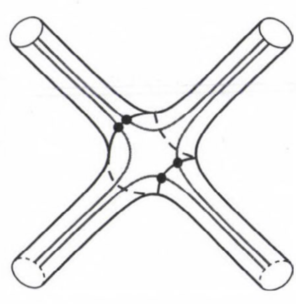
24. ábra. Heegaard-diagram a nyolcascsomóhoz

A vetület $n+2$ tartományainak határai egy-egy görbét adnak Σ-n, melyek persze körlapokat határolnak U_1-ben. A kijelölt e éllel határos egyik tartomány határát elhagyva $n+1$ darab $H_1(\Sigma)$-ban lineárisan független görbét kapunk, melyek leírják U_1-et. Legyenek ezek az α-görbék, és ezek közül legyen α_{n+1} az e-vel határos tartomány határa. A nyolcascsomó szokásos vetületéhez tartozó α-görbéket a 24. ábra jobb oldala szemlélteti. A két bázispontot pedig rakjuk a β_{n+1}-görbe két oldalára (lásd 23. ábra bal oldala). Ekkor a megadott $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, z, w)$ kétszer pontozott Heegaard-diagram valóban a csomót adja meg: a w-t z-vel összekötő szakasz egy rövid β_{n+1}-re transzverzális szakasz, a β-görbék komplementumában haladó görbének azonban végig követnie kell a csomót. A nyolcascsomó esetében a definiált csomót a 25. ábra szemlélteti. A $\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ generátorok meghatározásához



25. ábra. A csomó megtalálása a Heegaard-diagramban

vegyük észre, hogy β_{n+1}-et csak α_{n+1} metszi, így az $x_{n+1} = \alpha_{n+1} \cap \beta_{n+1}$ pontot minden generátornak tartalmaznia kell. A többi β-görbe a metszéspontok környezetében megy, és azon α-görbéket metszi, melyek által határolt tartománynak csúcsa a metszéspont (26. ábra). Azaz az egyik metszet kiválasztása megfelel egy, a met-



26. ábra. A generátorok egy metszéspont közelében

széspont melletti tartomány kiválasztásának, és így egy generátor n ilyen kiválasztásnak, azaz épp egy Kauffman-állapotnak felel meg. S^3-ban mind az Alexander-, mind a Maslov-gradálás abszolúttá tehető:

$$A(\mathbf{x}) = \sum A(x_i) \qquad \text{és} \qquad M(\mathbf{x}) = \sum M(x_i),$$

ahol $A(x_i)$ és $M(x_i)$ a 4. ábra szerint számítható. Annak ellenőrzése, hogy a fenti képletek valóban a relatív gradálások felemeltjei, bonyolult, és itt nem is részletezzük. Számítsuk ki a csomó Floer-homológiákat az összes gradálásban, és tekintsük a

$$\sum_A \sum_M (-1)^M \mathrm{rk}\big(\widehat{HFK}_M(K,A)\big)T^A$$

polinomot. Ez a polinom tehát a rögzített Alexander-gradálásokhoz tartozó homológiák Euler-karakterisztikáinak T^A-szorosának formális összege. Mivel egy lánckomplexus és a hozzá tartozó homológiák Euler-karakterisztikája megegyezik, így ez a polinom megegyezik a

$$\sum_A \sum_M (-1)^M \mathrm{rk}\big(\widehat{\mathrm{CFK}}_M(K,A)\big)T^A$$

polinommal, ami pedig épp az Alexander-polinom:

7.7. tétel [14]. *Tetszőleges K csomóra:*

$$\sum_A \sum_M (-1)^M \mathrm{rk}\big(\widehat{HFK}_M(K,A)\big)T^A = \Delta_K(T).$$

A fenti tétel épp azt mondja ki, hogy a csomó Floer-homológia az Alexander-polinom kategorifikáltja. A csomó Floer-homológia többet érzékel a csomóból, mint az Alexander-polinom, pl. kiszámítható belőle a csomó génusza:

7.8. tétel [16]. *Tetszőleges K csomóra a csomó génusza:*

$$g(K) = \max\{A : \exists M : \widehat{HFK}_M(K,A) \neq \{0\}\}.$$

Sőt, a csomó fibráltsága is megállapítható a csomó Floer-homológia segítségével:

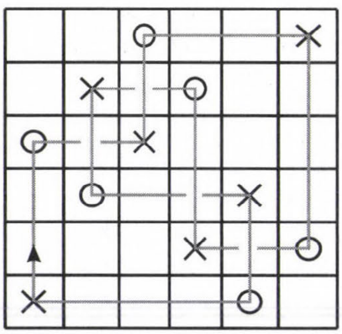
7.9. tétel [2, 12]. *Egy K csomó pontosan akkor fibrált, ha a $\widehat{HFK}_{g(K)}(K) = \mathbb{Z}_2$.*

7.4. A csomó Floer-homológia számíthatósága – Rácsdiagramok.

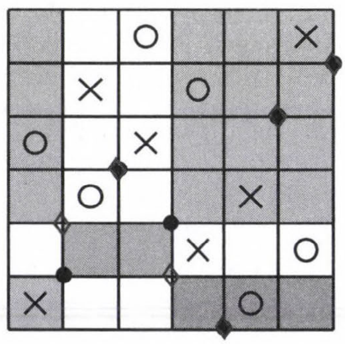
A $\widehat{HFK}$ csomó Floer-homológia, $\widehat{HF}$-hez hasonlóan, kombinatorikusan számítható, és ez a számítás S^3-ban a rácsdiagramok segítségével teljesen elemi. Az elmélet a Heegaard–Floer-homológia definíciójának egy általánosításán múlik, amikor a használt Heegaard-diagramok a Heegaard-felület génuszánál több α- és β-görbét, és több bázispontot tartalmaznak. Pontosabban, legyen Σ egy g génuszú felület, $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{g+k-1}\}$, $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_1, \ldots, \beta_{g+k-1}\}$ görbék Σ-n, melyek komplementuma $\Sigma - \boldsymbol{\alpha}$ és $\Sigma - \boldsymbol{\beta}$ k-k darab körlap. Helyezzünk a felületre k darab bázispontot, $\mathbf{z} = \{z_1, \ldots, z_k\}$ úgy, hogy mind a $\Sigma - \boldsymbol{\alpha}$ komplementum k körlapjába, mind a $\Sigma - \boldsymbol{\beta}$ komplementer k körlapjába épp 1-1 pont kerüljön. Ekkor a $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{z})$ egy több bázispontú Heegaard-diagram, és az általa meghatározott sokaság (amely fogantyúiban tehát az α-, illetve β-görbék körlapokat határolnak) egyértelmű. A több bázispontú Heegaard-diagram analóg módon definiálható csomók esetében is. A diagram ebben az esetben két bázispontkészletet tartalmaz: $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}, \mathbf{z})$, és a csomó a $\mathbf{z}$-t, $\mathbf{w}$-vel $\Sigma - \boldsymbol{\alpha}$-beli, és a $\mathbf{w}$-t $\mathbf{z}$-vel $\Sigma - \boldsymbol{\beta}$-beli ívek a fogantyúkba tolt összefűzéséből áll. Az ilyen diagramokra is definiálhatóak a Heegaard-lépések, és különösebb nehézség nélkül a Heegaard–Floer-homológia is általánosítható [23], sőt lényegében az eredeti Heegaard–Floer-homológiát adja vissza (lásd a 7.11. tételt). A több bázisponttal rendelkező Heegaard-diagramok jelentősége abban rejlik, hogy bizonyos esetekben, mint például az S^3-beli csomók esetében, egyszerűbben kezelhetőek.

7.10. definíció. Egy $n \times n$-es rács négyzeteiben adott n darab X és n darab O egy *rácsdiagramot* ad meg, ha minden sorban és oszlopban pontosan egy X, illetve O van.

Kössük össze vízszintes szakaszokkal az X-eket az O-kal, és függőleges szakaszokkal az O-kat az X-ekkel, úgy, hogy mindig a függőleges szakasz menjen felül. A kapott diagram (a sarkok simítása után) egy láncdiagramot ad meg. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban csak olyan rácsdiagramokkal foglalkozunk, melyek egykomponensű láncot, azaz csomót adnak meg. A nyolcascsomót leíró rácsdiagramot a 27. ábra szemlélteti. Ha a rácsnégyzet alsó-felső és jobboldali-baloldali éleit



rácsdiagram a nyolcascsomóhoz



két generátort összekötő 2 db téglalap

27. ábra. Rácsdiagram a nyolcascsomóhoz

azonosítjuk, egy tóruszt kapunk, és a függőleges és vízszintes rácsvonalak zárt körökké zárulnak össze. A kapott tórusz mint Heegaard-felület, és a vízszintes körök mint α-, a függőleges körök mint β-görbék S^3 egy $(T^2, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ Heegaard-diagramját adják. A Heegaard-diagramon az X-ek játsszák a z_i-k, az O-k pedig a w_i-k szerepét. Így egy a rácsdiagram által leírt csomóhoz tartozó Heegaard-diagramot kapunk.

A generátorok megfelelnek az olyan rács n-eseknek, melyek pontjai minden vízszintes, illetve függőleges rácsvonalat elfoglalnak. Mivel a diagram szép, így az $\mathbf{x}$ generátor határában $\mathbf{y}$ akkor fordulhat elő, ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ pontosan két koordinátában különbözik. Ekkor $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ különböző koordinátái négy pontot határoznak meg, melyek négy rácstéglalapot feszítenek ki, ezek közül kettőnek van $\mathbf{x}$ a bal alsó, illetve jobb felső sarkában (27. ábra). Azt mondjuk, hogy ez a két téglalap összeköti $\mathbf{x}$-et $\mathbf{y}$-nal (a másik két téglalap $\mathbf{y}$-t köti össze $\mathbf{x}$-szel). Egy téglalap üres, ha a belsejében nem tartalmaz sem X-et, sem O-t, sőt $\mathbf{x}$ (vagy $\mathbf{y}$) egyetlen más pontját sem. Az indexformula szerint épp az üres téglalapok azok, amelyek a határleképezésbe beleszámítanak. Jelölje az $\mathbf{x}$-et $\mathbf{y}$-nal összekötő üres téglalapok halmazát $\mathcal{R}_0(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Ez a halmaz egyelemű, kételemű vagy üres. Az eddigiek alapján tehát

$$\partial \mathbf{x} = \sum_{\mathbf{y}\in\mathbb{T}_\alpha\cap\mathbb{T}_\beta} |\mathcal{R}_0(\mathbf{x},\mathbf{y})|\mathbf{y}.$$

A holomorf elméletből már tudjuk, hogy ezzel a határleképezéssel $(\widehat{CF},\partial)$ lánckomplexust ad, ebben az esetben azonban ennek bizonyítása lényegesen egyszerűbb, kombinatorikus. Sőt a Reidemeister-lépések általánosításaként megadhatók a rácsdiagramoknak olyan változtatásai, melyek bármely két ugyanazt a csomót definiáló rácsdiagramot egymásba visznek. Ezen lépések halmaza, ebben az esetben is hasznos, és segítségükkel kombinatorikusan be lehet látni, hogy egy csomóinvariánst kapunk, mely a rácsdiagram méretére is emlékszik (az invariáns tenzorszorzódik $\mathbb{Z}_2^{\otimes 2}$-vel, ha eggyel növeljük a rács méretét). A holomorf elméletből ekkor pedig következik, hogy az invariáns a csomó Floer-homológiájának stabilizáltja, azaz:

7.11. tétel [10]. *Ha egy $n\times n$-es rácsdiagram a K csomót írja le, akkor a fent definiált lánckomplexus homológiája:*

$$H_*(\widehat{CF},\partial) = \widehat{HFK}(K)\otimes\mathbb{Z}_2^{\otimes 2(n-1)}.$$

Irodalom

[1] J. W. Alexander, Topological invariants of knots and links, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **30(2)** (1928), 275–306.

[2] Paolo Ghiggini, Knot Floer homology detects genus-one fibred knots, *Amer. J. Math.*, **130(5)** (2008), 1151–1169.

[3] Robert E. Gompf és András I. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus,* volume 20 of *Graduate Studies in Mathematics,* American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[4] Allen Hatcher, *Algebraic topology,* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[5] Christoph Hummel, *Gromov's compactness theorem for pseudo-holomorphic curves,* volume 151 of *Progress in Mathematics,* Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.

[6] Louis H. Kauffman, *Formal knot theory,* volume 30 of *Mathematical Notes,* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1983.

[7] R. C. Kirby és L. C. Siebenmann, On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75** (1969), 742–749.

[8] Robert Lipshitz, A cylindrical reformulation of Heegaard Floer homology, *Geom. Topol.*, **10** (2006), 955–1097 (electronic).

[9] I. G. MacDonald, Symmetric products of an algebraic curve, *Topology,* **1** (1962), 319–343.

[10] Ciprian Manolescu, Peter Ozsváth, Zoltán Szabó and Dylan Thurston, On combinatorial link Floer homology, *Geom. Topol.*, **11** (2007), 2339–2412.

[11] Edwin E. Moise, Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung, *Ann. of Math. (2)*, **56** (1952), 96–114.

[12] Yi Ni. Knot, Floer homology detects fibred knots, *Invent. Math.*, **170(3)** (2007), 577–608.

[13] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó. Absolutely graded Floer homologies and intersection forms for four-manifolds with boundary, *Adv. Math.*, **173(2)** (2003), 179–261.

[14] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, Heegaard Floer homology and alternating knots. *Geom. Topol.*, **7** (2003), 225–254 (electronic).

[15] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, Heegaard-diagrams and holomorphic disks, in: *Different faces of geometry*, volume 3 of *Int. Math. Ser. (N.Y.)*, pages 301–348. Kluwer/Plenum, New York, 2004.
`http://www.math.columbia.edu/~petero/HolomorphicDisks.pdf`

[16] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, Holomorphic disks and genus bounds, *Geom. Topol.*, **8** (2004), 311–334 (electronic).

[17] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, Holomorphic disks and knot invariants, *Adv. Math.*, **186(1)** (2004), 58–116.

[18] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, Holomorphic disks and three-manifold invariants: properties and applications, *Ann. of Math. (2)*, **159(3)** (2004), 1159–1245.

[19] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds, *Ann. of Math. (2)*, **159(3)** (2004), 1027–1158.

[20] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, Holomorphic triangles and invariants for smooth four-manifolds, *Adv. Math.*, **202(2)** (2006), 326–400.

[21] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, An introduction to Heegaard Floer homology, in: *Floer homology, gauge theory, and low-dimensional topology*, volume 5 of *Clay Math. Proc.*, pages 3–27. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
`http://www.math.columbia.edu/~petero/Introduction.pdf`

[22] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, Lectures on Heegaard Floer homology, in: *Floer homology, gauge theory, and low-dimensional topology*, volume 5 of *Clay Math. Proc.*, pages 29–70. Amer. Math. Soc., Providence, RI (2006).
`http://www.math.columbia.edu/~petero/Lectures.pdf`

[23] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, Holomorphic disks, link invariants and the multi-variable Alexander polynomial, *Algebr. Geom. Topol.*, **8(2)** (2008), 615–692.

[24] Peter Ozsváth, Zoltán Szabó és András Stipsicz, A combinatorial description of the $U^2 = 0$ version of Heegaard Floer homology. arXiv:0811.3395v1.

[25] Tim Perutz, Hamiltonian handleslides for Heegaard Floer homology, *Proc. 14th Gokova Geometry-Topology Conference*, 2007. `http://arxiv.org/abs/0801.0564`

[26] Elvira Strasser Rapaport, On the commutator subgroup of a knot group, *Ann. of Math. (2)*, **71** (1960), 157–162.

[27] J. A. Rasmussen, *Floer homology and knot complements*, Phd thesis, Harvard University, 2003. math/0607691.

[28] K. Reidemeister, *Knot theory*. BCS Associates, Moscow, Idaho, 1983. Translated from the German by Leo F. Boron, Charles O. Christenson and Bryan A. Smith.

[29] S. Sarkar és J. Wang, An algorithm for computing some Heegaard Floer homologies, *Ann. of Math. (2)*, **169** (2009), no. 2, 633–660.

[30] H. Seifert, Topologie Dreidimensionaler Gefaserter Räume, *Acta Math.*, **60(1)** (1933), 147–238.

[31] James Singer, Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **35(1)** (1933), 88–111.

[32] András I. Stipsicz, Négydimenziós topológia, 1998.
`http://www.renyi.hu/~stipsicz/magyar/4dimenzio.pdf`

Vértesi Vera

MTA Rényi Intézet
Budapest, Reáltanoda utca 13–15.

e-mail: `vvertesi@renyi.hu`

SAJTÓKÖZLEMÉNY

A RÉNYI KÖNYVTÁR AZ ÉLETHOSSZIG TARTÓ TANULÁSÉRT

Az európai uniós TÁMOP-3.2.4-09/1/KMR-2010-0008 pályázatnak köszönhetően az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet könyvtára elektronikus katalógusában húszezerrel több könyv és 700 folyóirat bibliográfiai leírása érhető el.

A Rényi könyvtárból elérhető teljes szövegű adatbázistartalmak könnyen hozzáférhetővé váltak a megújult, két nyelven is olvasható honlapon található e-forráslokátorból és a könyvtári katalógusból (`http://www.renyi.hu/konyvtar/main_hu.html`).

Szintén ezen pályázati támogatás tette lehetővé a Matematikai Egyesített Katalógus (MatEK) (`http://matek.ek.szte.hu/matek/opac`) megvalósítását, melynek segítségével a hat legjelentősebb matematikai gyűjteménnyel rendelkező hazai könyvtárban lehet egyidejűleg keresni:

- BME OMIKK
- Debreceni Egyetemi és Nemzeti Könyvtár
- ELTE Egyetemi Könyvtári Szolgálat
- Magyar Tudományos Akadémia Könyvtára
- MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet
- SZTE Egyetemi Könyvtár

A fejlesztésnek köszönhetően a könyvtárközi kérések magas színvonalú teljesítését új, korszerű dokumentumtovábbító rendszer segíti elő.

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

Nagy és Társa Nyomda és Kiadó Kft., Budapest